

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Antweiler, Anton:** Unendlich. Eine Untersuchung zur metaphysischen Wesenheit Gottes auf Grund der Mathematik, Philosophie, Theologie. (Freiburg. theol. Studien. Hrsg. v. Arthur Allgeier u. Engelbert Krebs. H. 38.) Freiburg i. Br.: Herder & Co. G. m. b. H. 1934. 200 S. RM. 4.—

Church, Alonzo: A set of postulates for the foundation of logic. II. Ann. of Math., II. s. 34, 839—864 (1933).

Das vom Verf. in Ann. of Math. 33, 346 (vgl. dies. Zbl. 4, 145) angegebene Axiomensystem hat sich als widerspruchsvoll herausgestellt. Um den Widerspruch (eine modifizierte Form der Russellschen Paradoxie) zu vermeiden, werden in der vorliegenden Arbeit einige Modifikationen an den Axiomen vorgenommen, welche die Wirkung haben sollen, den Beweis „leerer“ Implikationen (d. h. solcher, deren Vorderglied immer falsch ist) unmöglich zu machen. Verf. entwickelt dann (streng formal) eine Reihe von Folgerungen aus den Axiomen, welche insbesondere die Begriffe der Identität, der Klasse und der sog. „Vervollständigung einer Aussagefunktion“ betreffen. Das letztere bedeutet die Konstruktion einer neuen Aussagefunktion, deren Definitionsbereich möglichst umfassend ist und welche im alten Bereich mit der früheren Aussagefunktion übereinstimmt. Seit dem Erscheinen der Arbeit hat sich herausgestellt, daß die vom Verf. angegebenen Modifikationen seiner ursprünglichen Axiome zur Vermeidung von Widersprüchen nicht hinreichen, d. h. daß auch das neue System Antinomien enthält. Davon wird nicht betroffen eine im letzten Abschnitt gegebene Definition der natürlichen Zahlen, nach welcher die Zahl n diejenige Operation ist, welche aus jeder Funktion $f(x)$ ihre n -te Potenz $\underbrace{f\{f \dots f[f(x)]\}}_n$ erzeugt. Dies ermöglicht eine besonders

einfache Darstellung der rekursiven Definitionen. Zum Beispiel ist $m + n = [m(S)](n)$, wenn $S(x)$ die Funktion $x + 1$ bedeutet.

K. Gödel (Princeton).

Gödel, Kurt: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Phys. 40, 433—443 (1933).

Das Entscheidungsproblem des engeren Funktionenkalküls für den Fall der Erfüllbarkeit eines Zäusdrucks der Form

$(Ex_1)(Ex_2) \dots (Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez_1)(Ez_2) \dots (Ez_n) \mathcal{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, y_2, z_1, \dots, z_n)$ wurde von Gödel und Kalmar unabhängig gelöst (s. Arbeit von Kalmar, dies. Zbl. 6, 385). Im vorliegenden Aufsatz beweist der Verf. folgende weitere Sätze: 1. Wenn ein Ausdruck der oben genannten Form mit $m = 0$ überhaupt erfüllbar ist, so auch in einem endlichen Individuenbereich. Dabei wird die Kardinalzahl dieses Individuenbereichs nach oben in ziemlich komplizierter Weise abgeschätzt. Es ergibt sich aus der Kalmarschen Arbeit, daß dieses Resultat sich auf den allgemeinen oben genannten Fall ausdehnen läßt. 2. Die Entscheidung über die Erfüllbarkeit eines ganz beliebigen Zäusdrucks läßt sich auf die gleiche Frage für einen Ausdruck der Form

$(x_1), (x_2), \dots, (x_m)(Ey_1)(Ey_2) \dots (Ey_n) \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ mit $m \leq 3$ zurückführen, wo \mathcal{A} außerdem nur zweistellige Funktionsvariable enthält. — Das Verständnis gewisser Einzelheiten wird durch Kenntnis der oben zitierten Kalmarschen Arbeit erleichtert.

H. B. Curry (State College, Pennsylvania).

Chwistek, L., W. Hetper et J. Herzberg: Fondements de la métamathématique rationnelle. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 9, 253—264 (1933).

Die Regeln des Chwistekschen Systems der elementaren Semantik (vgl. dies. Zbl. 4, 1 u. 7, 385) werden — in ihrer neusten Formulierung — in übersichtlicher Weise

zusammengestellt und interpretiert. Als Hauptziel der Semantik wird die Vermeidung von Existenzforderungen hervorgehoben; alle Objekte, mit denen verfahren wird, lassen sich aus zwei Zeichen (* und 0) konstruieren. — An die elementare Semantik, die sich ganz innerhalb eines „Typs“ bewegt, ist nach Chwistek die „métamathématique rationnelle“ anzuschließen. Die Regeln dieses Formalismus, betreffs dessen genauerer Verfolgung eine weitere Note angekündigt wird, sind nicht angegeben; dagegen werden die Definitionen der in ihm ausdrückbaren wichtigen Begriffsbildungen (wie Klasse und Relation) zusammengestellt. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Barzin, M., et A. Errera: La logique de M. Brouwer. État de la question. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 51—52 (1933).

Les auteurs croient pouvoir tirer des conséquences défavorables sur la valeur de la logique intuitionniste du fait que dans cette logique il ne peut pas exister de proposition „tierce“, c.-a.-d. ni démontrablement vraie, ni démontrablement fausse, ni démontrablement indépendante des propositions fondamentales. *Heyting.*

Algebra und Zahlentheorie.

Chakrabarti, S. C.: On a few factorable continuants and a theorem in determinants. Indian Phys.-Math. J. 4, 43—46 (1933).

Es ergibt sich z. B.

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & -1 & & & \\ \alpha_2 & & \beta_2 & -1 & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \alpha_n & \beta_n \end{vmatrix} = (-1)^n \binom{n+2}{2} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

wobei $\alpha_x = \frac{2(n-x+1)(n-r+x+1)}{(n-x+3)(n-x+2)}, \quad \beta_x = -\frac{n-2r+3x+2}{n-x+2}.$

Otto Szász (Cambridge, Mass.).

Chlodovskij, I.: Sur le cas général de la transformation de l'équation séculaire par la méthode de A. Kriloff. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 8, 1077—1102 (1933) [Russisch].

Lusin hat gezeigt, daß eine gewisse von Kryloff zu einer quadratischen Matrix angegebene Gleichung $D(\lambda) = 0$ bei geeigneter Wahl gewisser Parameter unter ihren Wurzeln $\lambda^{(i)}$ Wurzeln der Säkulargleichung enthält. Die Vielfachheiten κ_i der Wurzeln $\lambda^{(i)}$ kann man zwischen 1 und dem Exponenten $e^{(i)}$ des entsprechenden Elementarteilers $(\lambda - \lambda^{(i)})^{e^{(i)}}$ beliebig vorschreiben: $1 \leq \kappa_i \leq e^{(i)}$. Ob die Vielfachheiten die Exponenten der Elementarteiler auch übertreffen können, wurde von Lusin offen gelassen. In der vorliegenden Arbeit beweist Chlodovskij, daß das nicht möglich ist.

Th. Zech (Darmstadt).

Jacobsthal, E.: Zur Theorie der linearen Abbildungen. S.-B. Berlin. math. Ges. 33, 15—34 (1934).

Es sei der Komplex aller Matrizen S , deren Elemente komplexe Zahlen und deren Determinanten von Null verschieden sind. Ferner sollen sich diese Matrizen alle nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Genügen diese Matrizen S noch der Bedingung $S\bar{S} = \mu E$, wobei im allgemeinen zu jedem S ein anderes μ gehört, so heißt \mathfrak{S} ein Kreiselement. Dann folgt: 1. μ ist eine reelle Zahl, 2. alle einem \mathfrak{S} zugehörigen μ haben dasselbe Vorzeichen, das die Charakteristik von \mathfrak{S} genannt wird, 3. jedes zu einem Kreiselement \mathfrak{S} „verwandte“ Element \mathfrak{S}_1 ist auch ein Kreiselement mit derselben Charakteristik wie \mathfrak{S} , 4. hat das Kreiselement \mathfrak{S} die Charakteristik ε , so ist die von \mathfrak{S}^m gleich ε^m , 5. alle Kreiselemente mit gleicher Charakteristik sind „verwandt“. Hierbei heißen 2 Kreiselemente \mathfrak{S} und \mathfrak{S}_1 verwandt, wenn ein Komplex \mathfrak{D} existiert, so daß $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{S} \mathfrak{D}$ ist. Anschließend beschäftigt sich Verf. mit der geometrischen Deutung der Kreiselemente, indem er zu quadratischen zweireihigen Matrizen übergeht.

Wegner (Darmstadt).

Walsh, J. L.: Note on the location of the roots of the derivative of a polynomial. Bul. Soc. şti. Cluj 7, 521—526 (1934).

Liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ in bezug auf den Punkt 0 symmetrisch, so hat $f(z)$ die Form $f(z) = z^k \varphi(z^2) = f(w^{\frac{1}{2}}) = w^{\frac{k}{2}} \varphi(w)$, wo $\varphi(w)$ ein Polynom bedeutet. Ist $F(w) = f(w^{\frac{1}{2}})$ bzw. $F(w) = [f(w^{\frac{1}{2}})]^2$, je nachdem $f(0) \neq 0$ bzw. $f(0) = 0$ ist, so kann man auf Grund des bekannten Gauß-Lucasschen Satzes aus der Lage der Nullstellen des Polynoms $F'(w)$ für die Lage der Nullstellen von $f'(z)$ Sätze ableiten. So gilt z. B. der Satz: Liegen die Nullstellen von $f(z)$ alle innerhalb einer gleichseitigen Hyperbel H mit dem Mittelpunkt 0, so liegen die Nullstellen von $f'(z)$ — ausgenommen die einfache Nullstelle 0 — ebenfalls innerhalb von H . (Aus einem innerhalb von H liegenden Punkte der Ebene geht entweder keine oder nur eine Tangente an H). Verf. verallgemeinert die erhaltenen Sätze auch für Polynome von der Form $f(z) = z^k \varphi(z^n)$. Es gelten entsprechende Sätze für Greensche Funktionen. Sz. Nagy (Szeged).

Dieudonné, J.: Sur le module maximum des zéros d'un polynome. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 528—530 (1934).

In the polynomial

$$P(x) = 1 + a_1 x + \dots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n,$$

let n and the coefficients a_1, \dots, a_p be fixed. It is known that there exists a circle whose radius depends upon a_1, \dots, a_p and n , and which is $O(n)$ within which $P(x) = 0$ has p roots, and another circle whose radius is $O(n^{1/p})$ within which there is one root. The author indicates a simple method of deriving both results as well as estimates of circles within which there are q zeros ($q \leq p$). In general this radius is $O[n^{1/(p-q+1)}]$. The estimates are the best possible. The argument involves only the properties of sums of powers of the roots of an algebraic equation, and the simplest estimates of coefficients.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Sergescu, P.: Sur une extension des théorèmes de MM. Schur et Polyä. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 223—224 (1933).

Es sei $r > 0$, $p \geq 0$ ganz. Die Nullstellen von

$$F_p(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} (1 + r\nu)^p x^{\nu}$$

liegen in dem kleinsten konvexen Bereich, der die Nullstellen von $F_0(x)$ und den Nullpunkt enthält. — Dieser in der vorliegenden Note bewiesene Satz folgt unmittelbar als ein Spezialfall aus dem Graceschen Theorem (vgl. Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze 2, 65, Aufgabe 153). Ihn als eine „extension“ der Theoreme von Schur und Pólya zu bezeichnen, ist kaum statthaft.

Szegő (Königsberg i. Pr.).

Anghelutza, Th.: Une extension d'un théorème d'algèbre. Bul. Soc. şti. Cluj 7, 374—376 (1934).

Ist $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ eine ganze Funktion und ist ϱ die einzige positive Wurzel der Gleichung $|a_0| - |a_1| x - |a_2| x^2 - \dots = 0$, so hat die Funktion $P(x)$ keine Nullstelle im Kreise $|x| < \varrho$. Im Falle $|a_0| \geq |a_k|$ ($k = 1, 2, \dots$) ist $\varrho \geq 1/2$. — Sind die Koeffizienten von $P(x)$ alle positiv und ist $\lambda (> 0)$ eine untere Schranke der Verhältnisse a_k/a_{k+1} ($k = 1, 2, \dots$), so hat die Funktion $P(x)$ keine Nullstelle im Kreise $|x| < \lambda$. — Diese Verallgemeinerung des bekannten Eneström-Kakeya-schen Satzes ist aber nicht unbekannt (vgl. Kakeya, Tôhoku Math. J. 3, 23; Kempner, ebenda 4, 94; B. Segre, vgl. dies. Zbl. 7, 100).

Sz. Nagy (Szeged).

Macaulay, F. S.: Modern algebra and polynomial ideals. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 27—46 (1934).

Der vorliegende Bericht kann als Ergänzung des bekannten Cambridge-Tract des Verf. angesehen werden; die dort gegebenen Tatsachen werden vom Standpunkt der modernen Algebra aus neu entwickelt. Das vereinfacht die Fassung von Definitionen und Resultaten; Beweise werden nur gegeben, wenn sie früher ungenügend waren

oder durch die neuen Methoden sich ganz wesentlich vereinfachen lassen: so z. B. — zur Illustration der abstrakten Methoden — ein Beweis von Krull für einen Laskerschen Satz, Übertragung des M. Noetherschen Fundamentalsatzes auf Potenzreihen von n Veränderlichen; die früheren Beweise von Lasker und Macaulay waren kompliziert und ungenügend. — Wesentlich vereinfacht ist die Definition des „inversen Systems“; auch die „perfekten Ideale“ sind viel übersichtlicher geworden. Beim inversen System werden auch die entsprechenden Sätze der allgemeinen Idealtheorie gegeben, Sätze über irreduzible Ideale, die Ref. aus den Sätzen des Verf. abstrahiert hatte. Die Beweise waren damals zu kompliziert zur Publikation; sie wurden vereinfacht und erheblich weitergeführt durch Gröbner (erscheint demnächst in den Math. Ann.). Wichtig sind wieder die vielen Beispiele und Gegenbeispiele. Es ist zu vermuten, daß diese neue Fassung den Zusammenhang mit der allgemeinen Idealtheorie weiter klären wird, z. B. in Richtung der perfekten Ideale. *E. Noether* (Bryn Mawr, Pa.).

Conwell, H. H.: Linear associative algebras of infinite order whose elements satisfy finite algebraic equations. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 95—102 (1934).

Es werden Algebren A unendlichen Ranges über einem Zahlkörper Z betrachtet, in denen jedes Element Wurzel einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus Z ist. Gewisse Sätze der klassischen Theorie übertragen sich, z. B.: Jede nicht nur aus nilpotenten Elementen bestehende Teilalgebra enthält ein Idempotent. A besitzt ein Radikal, die eigentlich nilpotenten Elemente bilden also eine invariante Teilalgebra K . Die Differenzentalgebra $A - K$ enthält keine eigentlich nilpotenten Elemente. Enthält $A - K$ eine abzählbar unendliche Matrixalgebra, so enthält A selbst eine dazu isomorphe Teilalgebra. Für die die Elemente von A darstellenden spaltenfiniten Matrizen wird eine Normalform X gegenüber Transformation mit einer Matrix angegeben: X zerfällt in einzelne endliche Kästchen, die genau wie im Fall einer endlichen Matrix aussehen (vgl. Dickson, Modern Algebraic Theories, p. 90). *Köthe* (Münster i. W.).

Fueter, Rud.: Quaternionenringe. Comment. math. helv. **6**, 199—222 (1934).

Im Anschluß an eine Arbeit des Ref. [Math. Ann. **99**, 1 (1928)] werden Quaternionenalgebren \mathfrak{Q} mit rationalem Zentrum, aber unter Ausschluß formentheoretischer Methoden betrachtet, um diesem Gebiet von einer neuen Seite auch neue Freunde zu gewinnen. Zur besseren Übersicht und wegen der Kürze der Charakterisierung dürfte es aber zweckmäßig sein, wenn die unterdrückten Gesichtspunkte in dieser Besprechung kurz angedeutet werden. Wenn \mathfrak{o} eine maximale Ordnung bezeichnet, so wird für die Differenten \mathfrak{d} (hier Grundideal genannt) die Beziehung $\mathfrak{d}^2 = d\mathfrak{o}$ bewiesen, wobei d die Grundzahl von \mathfrak{Q} bezeichnet. Dabei wird durch Rechnung eine zweckmäßige Basis für \mathfrak{d} abgeleitet, die auch ohne Rechnung aus dem Begriff des Komplementes gefolgert werden könnte. Die Untersuchung erstreckt sich dann vorzugsweise auf „spezielle“ Quaternionenringe \mathfrak{Q} , d. h. solche, die durch zwei ganze und konkordante Quaternionen ω, Ω erzeugt werden können. Es ergibt sich hier die Frage nach den maximalen Ordnungen \mathfrak{o} , in denen \mathfrak{Q} liegt. Die Diskriminante der durch \mathfrak{Q} bestimmten Algebra \mathfrak{Q} , die zunächst einfach als Stammdiskriminante der Normenform einer Basis von \mathfrak{Q} gegeben wäre, wird in eine schöne Beziehung zu dem quadratischen Körper $k(\omega)$ gesetzt. Diese Beziehung (Satz 6) kann auch aufgefaßt werden als Anwendung der bekannten Tatsache, daß die Diskriminanten der in \mathfrak{Q} enthaltenen quadratischen Ringe vollständig dadurch charakterisiert sind, daß sie durch das Geschlecht ternärer quadratischer Formen darstellbar sind, das zu dem Stammgeschlecht der Diskriminante d reziprok ist. (Vgl. hierzu auch Korinek, dies. Zbl. **3**, 53). Die Anzahl der maximalen Ordnungen \mathfrak{o} , die \mathfrak{Q} umfassen, ist abhängig von der Zahl f , der Determinante der Transformation, die von der Basis einer maximalen Ordnung \mathfrak{o} zu der Basis von \mathfrak{Q} führt. Sie würde allgemein als Anzahl der Substitutionsklassen der Determinante f gegeben sein, die eine \mathfrak{Q} zugeordnete ternäre quadratische Form der Diskriminante fd durch f teilbar machen, und stimmt in den besonderen hier betrachteten Fällen mit der Anzahl der ganzen Ideale der Norm f in $k(\omega)$ überein (1. Hauptsatz). Nach einigen Bemerkun-

gen über allgemeinere Quaternionenringe werden gewisse ganze Ideale von \mathfrak{O} betrachtet und in Beziehung zu dem quadratischen Ring $r(\omega)$ gesetzt, womit eine kanonische Relativbasis gewonnen wird, welche diese Ideale vollständig charakterisiert (2. Hauptsatz). Für die Klassen dieser Ideale ergibt sich außerdem eine bemerkenswerte Zuordnung zu Klassen Hermitescher Formen, die nur leider an besondere Ordnung und Ideale betreffende Bedingungen geknüpft ist und nicht gegenüber Multiplikationen der Ideale invariant ist wie die entsprechende Zuordnung zwischen Ideal- und Formenklassen bei Ringen in quadratischen Körpern. Brandt (Halle, Saale).

Albert, A. A.: Integral domains of rational generalized quaternion algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 164—176 (1934).

Dickson, Latimer und Darkow haben für die rationalzahligen verallgemeinerten Quaternionenalgebren $Q = (1, i, j, ij)$ mit $ji = -ij$, $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ in Spezialfällen die Frage nach ganzzahligen Unterringen S behandelt; dabei ist ein solcher Ring S definiert durch die Forderungen: 1. Alle Elemente von S genügen einer ganzzahligen Minimalgleichung mit der Eins als höchstem Koeffizienten; 2. S enthält $1, i, j$; 3. S ist maximal in Q . In der vorliegenden Note zeigt Verf. zunächst, daß jede rationalzahlige verallgemeinerte Quaternionenalgebra einem Normaltypus isomorph wird, bei dem $\alpha \equiv -p \equiv 1 \pmod{4}$ (p positive Primzahl) und ebenso β von einer näher bestimmten Gestalt ist; es folgt daraus, daß jeder Ring S insbesondere das Element $(1+i)/2$ enthalten muß. Daraufhin wird es möglich, zu zeigen, daß Q genau 2 Ringe der bezeichneten Art enthält, deren Basen explizit aufgestellt werden. Grell (Jena).

Latimer, Claiborne G.: On the units in a cyclic field. Amer. J. Math. 56, 69—74 (1934).

Using the definitions and results of an earlier paper [Trans. Amer. Math. Soc. 35, 411 (1933); this Zbl. 6, 389], the author proves that an imaginary cyclic field F has a fundamental system of units which are all real. Also, that F contains a fundamental unit (such that it and its conjugates form a fundamental system) if and only if the ideal \mathfrak{K} of his previous paper is principal. If F is obtained by the composition of F_1 and F_2 of relatively prime degrees, then F contains a fundamental system of units some of which form such a system for F_1 and others for F_2 . MacDuffee.

Mignosi, Gaspare: Sui campi d'integrità di specie qualunque e su quelli di 2^a specie contenenti un corpo. Rend. Circ. mat. Palermo 57, 357—401 (1933).

In einer früheren Arbeit [Rend. Circ. mat. Palermo 56, 161—208 (1932); dies. Zbl. 6, 8] hatte Verf. die aus endlich vielen Elementen bestehenden Ringe in solche 1. und 2. Art eingeteilt, je nachdem sie pseudoperiodische Elemente enthielten oder nicht; die Ringe 1. Art wurden in eigentliche oder uneigentliche unterschieden, je nachdem sie Pseudo-Nullelemente besaßen oder nicht. Nach diesem letzteren Gesichtspunkte werden nun auch die Ringe 2. Art in vollständige und unvollständige klassifiziert. Nach vorbereitenden Betrachtungen über pseudoperiodische Elemente werden endliche Ringe betrachtet, die einen Körper enthalten. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein solcher Ring von 2. Art ist, und weiterhin charakteristische Kriterien für deren Vollständigkeit oder Unvollständigkeit. Mit diesen allgemeinen Hilfsmitteln werden die periodischen und pseudoperiodischen Elemente in gewissen speziellen unvollständigen Ringen bestimmt und sodann die Struktureigenschaften der einen Körper enthaltenden Ringe 2. Art mit den Ordnungszahlen p^2 , p^3 (p Primzahl) untersucht. Grell (Jena).

Vassiliou, Ph.: Über die Verzweigungszahlen eines Abelschen Zahlkörpers. Prakt. Akad. Athénon 8, 263—266 u. dtsh. Zusammenfassung 266 (1933) [Griechisch].

Es sei \mathfrak{K} ein relativ Abelscher Zahlkörper über \mathfrak{k} , \mathfrak{k}' ein Zwischenkörper zwischen \mathfrak{K} und \mathfrak{k} , p ein Primideal aus \mathfrak{k} , p' ein in p aufgehendes Primideal aus \mathfrak{k}' . Weiter seien v_1, v_2, \dots, v_n die Verzweigungszahlen für p zu $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$; V_1, V_2, \dots, V_t die Verzweigungszahlen für p zu $\mathfrak{k}'/\mathfrak{k}$ und v'_1, v'_2, \dots, v'_n die Verzweigungszahlen für p' zu $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}'$. Verf. berechnet bei gegebenen v_1, v_2, \dots, v_n und bei gegebenen Indizes je zweier aufein-

anderfolgender Glieder in den Reihen der Verzweigungsgruppen von \wp zu \mathfrak{A}/f und zu f'/f die Zahlen V_1, V_2, \dots, V_t und v'_1, v'_2, \dots, v'_n . Hieraus ergibt sich unmittelbar das bekannte wichtige Lemma von Herbrand, *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 9, 84ff. (1932). Vgl. auch dies *Zbl.* 8, 194. Bessel-Hagen (Bonn).

Watson, G. N.: *Generating functions of class-numbers.* *Compositio Math.* 1, 39 bis 68 (1934).

Die berühmten von Kronecker entdeckten Klassenanzahlrelationen forderten dazu heraus, erzeugende Potenzreihen zu betrachten, deren Koeffizienten Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen oder verwandte zahlentheoretische Funktionen sind. Bereits Hermite hat den Zusammenhang einiger der so gebildeten erzeugenden Funktionen (e. F.) mit den vier Jacobischen elliptischen Thetafunktionen festgestellt und seine Identitäten zur Herleitung von Klassenanzahlrelationen gebraucht, eine Methode, die in der anschließenden Literatur weitgehend ausgebaut wurde. In der Theorie der elliptischen Funktionen spielt nun die Transformation erster Ordnung eine grundlegende Rolle, insbesondere die Haupttransformation, die in dem Übergang vom Periodenverhältnis τ zu $-1/\tau$ bzw. von der Entwicklungsgröße $q = e^{\pi i \tau}$ zu $q_1 = e^{-\pi i/\tau}$ besteht. Das einfache Verhalten der Thetafunktionen gegenüber dieser Transformation ist bekannt. Infolge des Zusammenhangs der erwähnten e. F. mit den Thetafunktionen ist auch für diese e. F. ein charakteristisches Verhalten gegenüber der Haupttransformation zu erwarten. In der Tat hat Mordell während der beiden letzten Jahrzehnte zwei Beispiele solcher Formeln gefunden und mehrfach behandelt. Verf. unternimmt jetzt, systematisch nach einheitlicher Methode die Transformationsformeln für die e. F. aufzustellen.

Im einzelnen: $F(n)$ und $G(n)$ seien die Anzahlen der ungeraden bzw. aller Klassen binärer quadratischer Formen (in Gaußscher Schreibweise mit geradem mittlerem Koeffizienten) der Determinante $-n$, wobei die zu $a(x^2 + y^2)$ bzw. $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$ äquivalenten Klassen nur mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ zu zählen sind und $F(0) = 0$, $G(0) = -\frac{1}{24}$ sein soll. Weiter sei

$$\begin{aligned} F_1(n) &= G(n) - F(n), & E(n) &= F(n) - F_1(n), \\ J(n) &= F(n) + 3F_1(n), & I(n) &= F(n) - 3F_1(n). \end{aligned}$$

Mit diesen Koeffizienten werden folgende für $|q| < 1$ reguläre Funktionen gebildet:

$$\mathcal{A}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+3/4} F(4n+3), \quad \mathcal{A}'(q) = \mathcal{A}(-q), \quad (-q = q e^{\pi i})$$

$$\mathcal{B}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n F(4n), \quad \mathcal{B}'(q) = \mathcal{B}(-q),$$

$$\mathcal{C}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n I(n), \quad \mathcal{C}'(q) = \mathcal{C}(-q),$$

$$\mathcal{I}(q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+7/8} F(8n+7), \quad \mathcal{I}'(q) = \mathcal{I}(-q),$$

$$\mathcal{U}(q) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} q^n J(n), \quad \mathcal{U}'(q) = \mathcal{U}(-q),$$

zu denen im Verlauf der Arbeit einige weitere hinzutreten, die in der bisherigen Literatur nicht vorkamen. Die vom Verf. gewonnenen Formeln sind so gebaut, daß die Summe je einer dieser Funktionen für das Argument q und einer zweiten für das Argument q_1 , die beiden Summanden evtl. mit trivialen Faktoren behaftet, gleich einem unendlichen Integral ist. Beispiel:

$$\mathcal{A}(q) - (-i\tau)^{-3/2} \mathcal{C}'(q_1) = - \int_0^{\infty} t e^{\pi i \tau t^2} \tanh \pi t \, dt = -(-i\tau)^{-3/2} \int_0^{\infty} \frac{t e^{-(\pi i/\tau) t^2}}{\sinh \pi t} \, dt.$$

Verf. stellt 21 Formeln von diesem Typus auf, zu denen zwei weitere triviale hinzutreten, die zwei der e. F. mit den Argumenten q und q_1 ohne hinzutretendes Integral verknüpfen. Durch Elimination der e. F. zwischen passend ausgewählten dieser Formeln gewinnt man Relationen zwischen drei bestimmten Integralen, die sich, wie Verf. an einem Beispiel zeigt, auch direkt beweisen lassen. Zum Schluß gibt Verf. für die in den Transformationsformeln auftretenden Integrale asymptotische Entwicklungen für den Fall sehr großer oder sehr kleiner Werte von $|\tau|$. — Die Beweismethode für die Transformationsformeln ist folgende: Nach gewissen von Humbert aufgestellten Formeln ist das Produkt einer der e. F. mit einem Theta-

nullwert (für das Argument q) gleich einer unendlichen Reihe, deren Glieder rationale Funktionen von q sind. Diese Reihenglieder stellt Verf. als Residuen einer meromorphen Funktion in einer z -Ebene an den Stellen $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ dar und verwandelt damit die unendliche Reihe in ein Integral, das nun seinerseits durch Verschiebung des Integrationsweges und Abfangen der Residuen umgestaltet wird. Die abgefangenen Residuen ergeben dann nach den Humbertschen Formeln als Hauptbestandteil von selbst das Produkt eines Thetanullwerts mit einer e. F. für das Argument q_1 .

Bessel-Hagen (Bonn).

Silberberg, Käthe: Über die Anzahl der Darstellungen ganzer totalpositiver Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers als Summen von Quadratzahlen und totalpositiven Primzahlen. Breslau: Diss. 1934. 37 S.

Die Hardy-Littlewoodsche Lösung des Goldbachschen Problems ist bereits von Rademacher auf algebraische Zahlkörper übertragen worden. Das Problem der Darstellung algebraischer Zahlen als Summe von Quadraten hat Siegel bereits behandelt. Es ergab sich so für Verf. die Aufgabe, diese beiden Ergebnisse zu kombinieren. Genau wie im rationalen Fall wird hier gebraucht, daß die Nullstellen der Abelschen L -Reihen des Körpers einen Realteil $< \theta < \frac{3}{4}$ haben. Unter dieser Annahme erhält Verf. asymptotische Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer total-positiven Zahl als Summe von m_1 Quadraten und m_2 total-positiven Primzahlen, falls $m_1 \geq 2, m_1 m_2 \geq 4$ ist. Aus diesen Formeln folgt insbesondere, daß für alle total-positiven Zahlen mit hinreichend großer Norm mindestens eine Darstellung existiert. Da im allgemeinen unendlich viele Darstellungen existieren, wird jede nur mit einem Gewicht gezählt, daß exponentiell mit dem absoluten Betrage der Konjugierten der Summanden gegen Null geht. Das ganze Verfahren wird für die arithmetische Progression durchgeführt.

Hans Heilbronn (Bristol).

Aigner, Alexander: Über die Möglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$ in quadratischen Körpern. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 226—229 (1934).

This paper gives the complete solution of the equation $x^4 + y^4 = z^4$ where x, y , and z are relatively prime integers of the quadratic field $K(\sqrt{m})$. It is shown that no solutions exist except when $m = -7$. In $K(\sqrt{-7})$ there is only one solution:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{-7}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1 - \sqrt{-7}}{2}\right)^4 = 1.$$

The method depends on transforming the given equation in such a way that its solution depends on the existence of rational integers which make certain quartic forms (for example $t^4 + 4u^4$) perfect squares. — The equation $x^2 + y^2 = z^2$ also is considered in $K(\sqrt{m})$. It has relatively prime solutions if and only if m contains no prime factor of the form $8n + 3$ or $8n + 5$.

D. H. Lehmer (Princeton).

Ciamberlini, Corrado: Sul numero delle soluzioni (intere e positive) dell'equazione: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$. Period. Mat., IV. s. 14, 119 (1934).

Schwindt, H.: Eine Bemerkung zu einem Kriterium von H. S. Vandiver. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 229—231 (1934).

Let p be an odd prime and define S_n by

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(P/n)^2}.$$

This paper proves by elementary methods that $5S_3 - S_5$ is divisible by p . On the other hand, Vandiver has proved that if S_3 is not divisible by p the equation (1) $x^p + y^p = z^p$ has no solution in integers prime to p . Hence we may state the following criterion: In order that (1) have a solution in case 1 it is necessary that S_5 be divisible by p .

D. H. Lehmer (Princeton).

Lubelski, S.: Problèmes et théorèmes de la théorie générale des nombres. I. Wiadom. mat. 34, 21—56 (1932); 35, 39—113 (1933) [Polnisch].

Diese Arbeit (Sonderabdruck aus Wiadom. mat. 34 und 35) enthält 122 Aufgaben aus der elementaren Zahlentheorie (S. 1—36) nebst den zugehörigen Lö-

sungen (S. 37—111). Der Stoff ist in 4 Kapitel eingeteilt: I. Allgemeine Eigenschaften der natürlichen Zahl (Nr. 1—30); II. die natürlichen Zahlen und ihre Teiler (Nr. 31—61); III. der Euklidische Satz und seine Anwendungen (Nr. 62—94) und IV. Zahlentheorie und andere Gebiete der Mathematik (Nr. 95—122). — Verf. setzt keine Vorkenntnisse aus der Zahlentheorie voraus und führt alle benutzten Begriffe ein. Die Aufgaben treten vielfach gruppenweise auf, um Schwierigeres vorzubereiten, meist sind auch Fingerzeige für die Lösung beigelegt. Wenngleich nun Verf. keine Anforderungen an den Leser stellt, so gelingt es ihm doch, eine ganze Anzahl von Aufgaben zu bringen, die keineswegs auf der Oberfläche liegen, ja, es findet sich in dem Buch manches Neue oder doch nicht in Lehrbüchern Behandelte, z. B. Nr. 26 (Kriterium für Quadratzahlen), Nr. 36 (Zerlegung in 5 Kuben), Nr. 48 (Beitrag zum Bertrand'schen Problem), Nr. 50—55 (Teiler quadratischer Formen), Nr. 73 (Verallgemeinerung eines Satzes von Frenicle-Euler-Bouniakowski-Liouville). — Eine Reihe wohl bekannter Ergebnisse konnte Verf. nur aufnehmen, weil es ihm gelungen war, die Beweise zu vereinfachen. Im übrigen ist noch hervorzuheben, daß Verf. bemüht war, in der Hauptsache solche Aufgaben zu bringen, deren Lösungen auf Grund weniger einheitlicher Prinzipien gelingen, z. B. durch Induktion (vgl. insbesondere Nr. 10, wo eine sehr nützliche Art mehrfacher Induktion eingeführt wird). — Das Werk ist auf 3 Teile berechnet.

A. Wal'fisz (Radośó, Polen).

Hölder, Otto: Verallgemeinerung einer Dirichletschen Summenumformung. Math. Z. 38, 476—482 (1934).

Verf. verallgemeinert eine Dirichletsche Formel für die Transformation gewisser Summen. — Es sei $z = f(y)$ eine endliche eindeutige stetige reelle Funktion, die für $\alpha \leq y \leq \alpha'$ ständig abnimmt. Diese Funktion hat dann auch eine Umkehrung $y = g(z)$ die gleichfalls immer abnimmt für $f(\alpha') \leq z \leq f(\alpha)$. Es sind außerdem zwei Folgen von reellen Zahlengrößen

(1) $a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} \rightarrow \infty$; $b_1 < \dots < b_n < b_{n+1} \rightarrow \infty$; $n = 1, 2, \dots, \infty$ gegeben. Den Gliedern dieser Folgen werden zwei beliebige Funktionen $\varphi(a)$ und $\psi(b)$ zugeordnet, deren summatorische Funktionen sind: $\Phi(x) = \sum_{a \leq x} \varphi(a)$, $\Psi(x) = \sum_{b \leq x} \psi(b)$. Es gilt dann die folgende Formel:

$$\sum_{\alpha < n \leq \alpha'} \varphi(a) \Psi(f(a)) - \sum_{\beta < b < \beta'} \Psi(b) \Phi(g(b)) = \Phi(\alpha') \Psi(f(\alpha')) - \Phi(\alpha) \Psi(f(\alpha)),$$

wo $f(\alpha') = \beta$, $f(\alpha) = \beta'$, $\alpha' = g(\beta)$, $\alpha = g(\beta')$ ist. — Ist $a_n = b_n = n$, $\varphi(n) = 1$ [so ergibt sich, wie Ref. bemerken muß, ein schon längst bekannter Satz, siehe z. B. Dirichlet, Werke 2, 97; Hacks, Acta math. 10, 1 (1887); Wenkov, Math. Z. 33, 363 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 120] $\psi(n) = 1$ und ist $z = f(y) = \frac{x}{y+a} - b$, wo $x > 0$, a und b irgendwelche reelle Zahlen sind, so erhält man die folgende Verallgemeinerung einer Dirichletschen Formel

$$\sum_{\alpha < n \leq \alpha'} \left[\frac{x}{n+a} - b \right] - \sum_{\beta < n \leq \beta'} \left[\frac{x}{n+b} - a \right] = [\alpha'] [\beta] - [\alpha] [\beta'].$$

Bezeichnet man die Anzahl der positiven Zahlen a bzw. b , die $\leq \xi$ mit $[\xi]_a$ bzw. $[\xi]_b$, so ergibt sich als zweite Folgerung die Formel

$$\sum_{a \leq x^l} \left[\frac{x}{a} \right]_b - \sum_{b > x^{l-1}} \left[\frac{x}{b} \right]_a = [x]_a [x^{1-l}]_b,$$

welche, wenn $l = \frac{1}{2}$ und $a_n = b_n = n$ ist, die wohlbekannte Dirichlet-Hermite'sche Formel darstellt (vgl. dies. Zbl. 7, 56).

Lubelski (Warszawa).

Ricci, Giovanni: Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tehebychef relativi alla progressione aritmetica. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 7—17 (1934).

Verf. beweist unter Benutzung des Hadamardschen Primzahlsatzes, aber ohne Benutzung der Dirichletschen Charaktere den folgenden Satz: In jeder arithmetischen

Progression, die zu dem Modul $a (> 0)$ teilerfremd ist, gibt es unendlich viele Zahlen der Form np , wo p Primzahl und $n < \frac{a}{\log a}$ ist. Dieser Satz wird in verschiedener Weise verschärft und erweitert. Z. B.: Es sei $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq b \leq a$, $(a, b) = 1$, $B_\varepsilon(\xi)$ die Anzahl der Zahlen x mit $x \equiv b \pmod{a}$, $1 - \varepsilon < \frac{x-b}{a\xi} < 1$, die mindestens einen Primfaktor \geq

$$\frac{x}{a} \left(\varepsilon \left(\log a + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p-1} \right) - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon) \right)$$

enthalten. Dann ist $B_\varepsilon(\xi) = \frac{\xi}{\log \xi} e^{O(1)}$.

Hans Heilbronn (Bristol).

Page, A.: On the representations of a number as a sum of squares and products. III. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 1—16 (1934).

Bezeichnungen: $\nu(n)$ die Anzahl der Quadrupel ganzer Zahlen x_1, x_2, y, z mit $y > 0, z > 0, x_1^2 + x_2^2 + yz = n$; n_1 der größte ungerade Teiler von n ; $r = 0$ oder 1 ; γ die Eulersche Konstante;

$$E_r(n) = \sum_{d|n_1} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} d^{-1} \log^r d, \quad E'_r(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} | n_1}} (-1)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{d}-1)} d^{-1} \log^r d,$$

$$F_r(n) = 4E_r(n) + E'_r(n), \quad b_r = \sum_{\substack{d=1 \\ d \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} \mu(d) d^{-2} \log^r d.$$

Hauptsatz: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\nu(n) = \frac{1}{4} \pi n [(\log n + 2\gamma - 1)b_0 - 2b_1] F_0(n) - 2b_0 F_1(n) - 4b_0 \log 2 \cdot E'_0(n) + O\left(n^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right).$$

In II (vgl. dies. Zbl. 8, 197) hatte Verf. dies mit dem weniger scharfen Restglied $O(n)$ elementar bewiesen. Die obige Verbesserung erfordert die Zuhilfenahme einer Reihe tiefliegender funktionentheoretischer und arithmetischer Hilfsmittel, wie sie ähnlich von Estermann und Salé zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten gewisser ganzer Modulformen benutzt worden sind.

A. Walfisz.

Dickson, L. E.: Waring's problem for cubic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 1—12 (1934).

If $f(x) = (\alpha x^3 + \beta x)/d$ ($\alpha \neq 0, \beta, d$ integers) is an integer ≥ 0 for every integer $x \geq 0$, and if $f(x)$ represents 1 for an integer $x \geq 0$, then $f(x)$ is either the pyramidal number $P(x) = (x^3 - x)/6$, or is $x + \varepsilon P(x)$, where ε is a positive integer. Students of the author are investigating the cases in which a term x^2 occurs or ε is divisible by 3. K. C. Yang proved in a Chicago thesis, 1928, that every integer is a sum of nine values of $(x^3 - x)/6$ for integers $x \geq 0$, (five values sufficing at least to 7240). For ε prime to 3 limits L_ε are obtained such that every integer exceeding L_ε is a sum of nine values of $x + \varepsilon P(x)$ for integers $x \geq 0$; e. g. $L_1 = 168 \cdot 3^{24}$. For $\varepsilon = 2$, $f(x) = (x^3 + 2x)/3$, and the limit is reduced to zero: every positive integer is a sum of nine values $f(x)$ for integers $x \geq 0$. The same probably holds for $f(x) = (x^3 + 5x)/6$ ($\varepsilon = 1$) but the process of reducing L_1 to zero is not yet complete. The proof commences with the fact that if $f(x) = x + \varepsilon P(x)$, $f(3m)$ represents all residues modulo 3^n by choice of m modulo 3^n ; thus for any integer s , $s = f(3m) + 3^n M$. Noting that

$$\sum_{j=1}^3 [f(3^n - x_j) + f(3^n + x_j)] = T, \quad T \equiv \varepsilon 3^{3n} + 3^n (\varepsilon Q - \varepsilon + 6), \quad Q \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

a process is developed for expressing a sufficiently large s as $f(3m) + f(v) + f(w) + T$, where $v + w = 3^{n+1}b$ (b prime to 3); it being necessary to satisfy residue conditions and inequalities to make Q a sum of three squares and the various arguments $3m, v, w, 3^n - x_j$, and $3^n + x_j$ all ≥ 0 .

G. Pall (Montreal).

Jarník, Vojtěch: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: Eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes. Math. Z. 38, 217—256 (1934).

Bezeichnungen und Annahmen: 1) $Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \dots + u_{r_j,j}^2)$, $\sigma \geq 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 > 0$, ..., $\beta_{\sigma} > 0$, $r_1 \geq 4$, ..., $r_{\sigma} \geq 4$, eine positiv definite quadratische Form in $r = r_1 + r_2 + \dots + r_{\sigma}$ Veränderlichen; $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen r -dimensionalen Ellipsoid $Q(u) \leq x$, $V_Q(x)$ das Volumen dieses Ellipsoids, $P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)$ der Gitterrest. 2) $R_{\sigma-1}$ der $(\sigma-1)$ -dimensionale cartesische Raum, in ihm (β) der Punkt $(\beta_2, \dots, \beta_{\sigma})$; fast alle (β) heiße: bis auf eine Ausnahmemeße vom Lebesgueschen Maße Null; $f = f(Q)$ die eindeutig bestimmte Zahl mit $P_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon}) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$ beliebig); $G(a)$ die Menge aller (β) mit $f(Q) = a$; $E(g(x))$ die Menge aller (β) mit $P_Q(x) = \Omega(g(x))$, wobei das für hinreichend großes x positive $g(x)$ vorgegeben ist. 3) Ist M eine Menge in $R_{\sigma-1}$, W ein Überdeckungssystem von endlich- oder abzählbar-unendlich-achsensparallelen Würfeln W_i der Kantenlängen d_i , $\eta > 0$, $\varrho > 0$, so sei $L_{\eta} = L_{\eta}(M; x^{\varrho})$ die untere Grenze von $\sum d_i^{\varrho}$ für beliebiges W mit sämtlichen $d_i < \eta$; $L(M; x^{\varrho}) = \lim_{\eta=0} L_{\eta}$ ($\varrho = \sigma - 1$ ergibt das äußere Lebesguesche Maß von M); ist M nicht leer, so sei $d(M)$ die untere Grenze der ϱ mit $L(M; x^{\varrho}) = 0$ (die „Dimension“ von M , es ist stets $0 \leq d \leq \sigma - 1$).

4) $0 < \lambda < \sigma - 1$. Hauptsätze: I. Zu jedem a mit $\frac{r}{2} - \sigma < a < \frac{r}{2} - 1$ gibt es ein Q mit $f(Q) = a$. II. $L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right); x^{\lambda}\right) = 0$. III. $L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right); x^{\lambda}\right) = \infty$. IV. Für fast alle (β) ist $f(Q) = \frac{r}{2} - \sigma$. V. a) $L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1\right); x^{\alpha}\right) = 0$ für jedes $\alpha > 0$; b) $L\left(G\left(\frac{r}{2} - \sigma\right); x^{\alpha}\right) = 0$ für $0 < \alpha \leq \sigma - 1$; c) $L\left(G\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma - \lambda}\right); x^{\alpha}\right) = 0$ für $\lambda < \alpha \leq \sigma - 1$, $= \infty$ für $0 < \alpha \leq \lambda$. VI. Für $\frac{r}{2} - \sigma \leq a \leq \frac{r}{2} - 1$ ist $d(G(a)) = \left(1 - \frac{2}{r-2a}\right)\sigma$.

Den Hauptteil vorliegender Arbeit nimmt der Beweis von II ein, der durch Weiterentwicklung einer früheren Methode des Verf. geführt wird. Den Spezialfall $\sigma = 2$ hatte Verf. schon 1929 erledigt. Aber $\sigma > 2$ ist wesentlich schwieriger zu behandeln, was damit zusammenhängt, daß man es hier mit simultanen diophantischen Näherungen zu tun hat und die Kettenbruchtheorie nicht anwendbar ist. III ist ebenso tieflegend, kann aber rasch erledigt werden, da Verf. den passenden Näherungssatz schon 1931 bewiesen hatte. — I, IV, V, VI sind Folgerungen aus II und III. Aus IV ist auch ersichtlich, warum Verf. einen Hausdorffschen Maß- und Dimensionsbegriff hinzuzieht: der Lebesguesche Maßbegriff ist hier nicht fein genug. — Um der Arbeit eine gewisse Abrundung zu geben, beweist

Verf., da es rasch geht, noch drei seiner älteren Sätze, nämlich: VII. $P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\right)$.

VIII. $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$ für $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \dots + \alpha_r u_r^2$, $r \geq 5$, $\alpha_1 > 0$, ..., $\alpha_r > 0$.

IX. $P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$ für die Q unter VIII, jedoch mit rationalen α . — VII und IX gehen elementar, VIII ergibt sich unschwer aus einem bei II benutzten Hilfssatz.

A. Walfisz (Radoś, Polen).

Wilton, J. R.: An extended form of Dirichlet's divisor problem. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 391—426 (1933).

Bezeichnungen und Annahmen: 1) g . ganz, ng . nicht ganz, f . für; $A > 0$ absolute Konstanten (unterschiedslos); $s = \sigma + it$, $|t| < A$; $x, N, s, \vartheta > 0$; $d, n > 0$ g ; $m \geq 0$ g ; kg ; u, y reell; $\lambda > -1$; $\eta = 1 + 2\left[\frac{\lambda+1}{2}\right]$; $\varrho = \lambda + s + 1$; $\kappa = \left[\left|\sigma\right| + \frac{3}{2}\right]$; $\Theta = \text{Max}\left(\left[\sigma - \lambda + \frac{1}{2}\right], 1\right)$, $l = \text{Max}\left(\left[-\frac{\sigma}{2}\right] - \left[\frac{\lambda+1}{2}\right], 0\right)$ ($= 0$ f . $\sigma > -2$); $\xi = \left[x + \frac{1}{2}\right]$; $p = \text{Max}\left(0, \left[\frac{\sigma}{2}\right]\right)$; $\mu = \frac{1}{2}|\sigma| - \frac{1}{8\left|\sigma\right|} - 1$; λ_0 kleinste g . Zahl $\geq \mu$. 2) $f(k) = \lim_{s=k} f(s)$ f . alle Funktionen von s ; $D_{\lambda}(x)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \sum_{n < x} \sigma_s(n) (x-n)^{\lambda} (\lambda \neq 0);$$

$$R_{\lambda}(x) = 2 \sum_{m \leq \frac{\lambda+1}{2}} (-1)^{m-1} \frac{x^{\lambda-2m+1} \zeta(2m) \zeta(1-2m-s)}{(2\pi)^{2m} \Gamma(\lambda-2m+2)} - \frac{x^{\lambda} \zeta(-s)}{2 \Gamma(\lambda+1)};$$

$$\Phi_\lambda(x) - R_\lambda(x) = 0 \quad (\text{ng. } \lambda, \sigma \leq -\eta - 1), = \frac{x^{\sigma+\lambda+1} \Gamma(s+1) \zeta(s+1)}{\Gamma(s+\lambda+2)} \quad (\text{sonst});$$

$$A_\lambda(x) = D_\lambda(x) - \Phi_\lambda(x), \quad A_{-1}(x) = -x^\sigma \zeta(1+s) - \zeta(1-s);$$

$$\psi_\lambda(x) = D_\lambda(x) - \frac{x^{\lambda+s+1} \Gamma(s+1) \zeta(s+1)}{\Gamma(s+\lambda+2)} - \frac{x^{\lambda+1} \zeta(1-s)}{\Gamma(\lambda+2)};$$

$$\Psi_\lambda(x) - \psi_\lambda(x) = \frac{x^{\lambda+1} \zeta(1-s)}{\Gamma(\lambda+2)} \quad (\sigma \geq 1), = 0 \quad (\sigma < 1);$$

$$\tilde{\psi}_0(x) = A_0(x) - \frac{1}{2} \zeta(-s); \quad \psi_\lambda^*(x) = A_0(x), \quad \psi_\lambda^*(x) = A_\lambda(x) + \frac{x^\rho \Gamma(s+1) \zeta(s+1)}{\Gamma(\rho+1)}$$

$$(g. \lambda \geq 1); \quad \Psi_\lambda^*(x) = A_0(x) + \frac{x^{\rho+1} \zeta(s+1)}{s+1} - \frac{1}{2} \zeta(-s), \quad \Psi_\lambda^*(x) = \psi_\lambda^*(x) - \frac{\zeta(-\lambda-s) \zeta(-\lambda)}{\lambda!}$$

(g. $\lambda \geq 1$); J, Y, K Besselsche Funktionen der ersten, zweiten, dritten Art;

$$G_\rho(x) = -J_\rho(x) \sin \frac{1}{2} s \pi - \left\{ Y_\rho(x) + (-1)^\lambda \frac{2}{\pi} K_\rho(x) \right\} \cos \frac{1}{2} s \pi \quad (g. \lambda);$$

$$G_\rho(x) \sin \frac{1}{2} s \pi = - \sum_{k \geq l} \frac{(\frac{1}{2} x)^{\rho+4k}}{(2k)! \Gamma(\rho+2k+1)} + \sum_{k \geq -\frac{\lambda+1}{2}} \frac{(\frac{1}{2} x)^{-s+\lambda+4k+1}}{\Gamma(2k+\lambda+2) \Gamma(2k+1-s)} \quad (\text{ng. } \lambda);$$

$$F_{m+s+1}(x) = \{G_\rho(x)\}_{\lambda=m}; \quad G_{\rho+m}(x) = g_{\rho+m}(x) + \frac{(-1)^m}{\sin \frac{1}{2} s \pi} \sum_{k=0}^p \frac{(\frac{1}{2} x)^{-s-m+\lambda+4k+1}}{\Gamma(2k+\lambda+2) \Gamma(2k+1-s-m)};$$

$$\sum (\lambda, N) = (2\pi)^\lambda A_\lambda(x) - \sum'_{n \leq N} \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{1}{2} \rho} \sigma_s(n) G_\rho(4\pi \sqrt{nx});$$

$$\Xi = -\frac{x^{\frac{1}{2}\lambda}}{\pi} \left(\frac{x}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}(s+\sigma+\frac{1}{2})} \sigma_s(\xi) (4\pi \sqrt{\xi - \sqrt{x}})^\lambda \int_{4\pi \sqrt{N} \sqrt{\xi - \sqrt{x}}}^{\infty} \sin \left\{ u s g n(\xi - x) + \frac{\lambda \pi}{2} \right\} \frac{du}{u^{\lambda+1}}$$

$$(x \neq \xi), \quad \Xi = -\frac{\sin \frac{1}{2} \lambda \pi}{\lambda \pi} \left(\frac{x}{N} \right)^{\frac{1}{2}\lambda} \sigma_s(x) (x = \xi, \lambda > 0), \quad \Xi = 0 \quad (\text{sonst});$$

$$H = \sum (\lambda, N) - \Xi; \quad H_1 = x^{\frac{1}{2}(\lambda+\sigma+|\sigma|+1)+\varepsilon} N^{-\frac{\lambda+1}{2}},$$

$$H_2 = x^{\frac{1}{2}(\lambda+\sigma-\frac{1}{2})} N^{\frac{1}{2}(|\sigma|-\lambda-\frac{1}{2})} |\log N|, \quad H_3 = x^{\lambda-\eta} N^{|\sigma|-\eta} (1 + |\log N x|),$$

$$H_4 = x^{\frac{1}{2}(\lambda+\sigma+|\sigma|)+\varepsilon} N^{-\frac{1}{2}\lambda}, \quad H_6 = x^{\frac{1}{2}(\sigma+|\sigma|)+\varepsilon} |x - \xi|^{-|\lambda|};$$

I die Intervallmenge: $m + \vartheta \leq x \leq m + 1 - \vartheta$ ($0 < \vartheta < \frac{1}{2}$; $m = 0, 1, 2, \dots$); (R, n, y) die Riesz'schen Mittel vom Typus n der Ordnung y ; k . konvergent, s. summierbar, ns. nicht summierbar. — Hauptsätze:

I.
$$(2\pi)^\lambda A_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{1}{2} \rho} \sigma_s(n) G_\rho(4\pi \sqrt{nx}) \quad \text{f. } \lambda > -\frac{1}{2},$$

wenn $|\sigma| < 1$, f. $\lambda > -1$, wenn $|\sigma| \geq 1$. Die Reihe ist 1) f. $\lambda > |\sigma| + \frac{1}{2}$ absolut k.; 2) f. $\sigma > -\eta$, wenn λ ng., f. ng. x , wenn $\lambda < 0$: a) f. $|\sigma| - \frac{1}{2} < \lambda \leq |\sigma| + \frac{1}{2}$ bedingt k.; b) f. $\lambda \leq |\sigma| - \frac{1}{2}$, $y > |\sigma| - \frac{1}{2} - \lambda$ s. (R, n, y) ; c) f. $\lambda \leq |\sigma| - \frac{1}{2}$, $y > |\sigma| - \frac{1}{2} - \lambda$ ns. (R, n, y) ; d) ns. $(R, n, |\sigma| - \frac{1}{2} - \lambda)$; 3) f. ng. $\lambda, \sigma \leq -\eta$ überhaupt ns. (R, n, y) . Die Konvergenz bzw. Summierbarkeit ist gleichmäßig: 4) f. $\lambda > 0$, $A < x < A$ überall; 5) f. $-1 < \lambda \leq 0$, $A < x < A$ in I .

II.
$$\sum (\lambda, N) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_s(n) \int_N^{\infty} \left(\frac{x}{u} \right)^{\frac{1}{2}(\rho+\kappa)} G_{\rho+\kappa}(4\pi \sqrt{xu}) \left(\frac{u}{n} \right)^{\frac{1}{2}(s+\kappa)} F_{s+\kappa}(4\pi \sqrt{nu}) du$$

$$- \sum_{k=-1}^{s-1} (2\pi)^k \left(\frac{x}{N} \right)^{\frac{1}{2}(\rho+k)} G_{\rho+k}(4\pi \sqrt{Nx}) A_k(N)$$

$$+ \zeta(1+s) \left\{ \sum_{k=2}^{\Theta} \frac{s(s-1) \dots (s-k+2)}{(2\pi)^k} \left(\frac{x}{N} \right)^{\frac{1}{2}(\rho-k)} G_{\rho-k}(4\pi \sqrt{Nx}) N^{-s-k+1} \right.$$

$$\left. + \frac{s(s-1) \dots (s-\Theta+1)}{(2\pi)^\Theta} \int_N^{\infty} \left(\frac{x}{u} \right)^{\frac{1}{2}(\rho-\Theta)} G_{\rho-\Theta}(4\pi \sqrt{xu}) u^{s-\Theta} du \right\}.$$

III. $N > A$, $x > A$. 1) f. g.; λ oder f. $\sigma > \lambda + \frac{1}{2} - 2\eta$ ist $H = O(H_1) + O(H_2)$, gleichmäßig in $A < x < A$; 2) sonst $H = O(H_1) + O(H_2)$; 3) f. x in I ist $H = O(H_1)$; 3) f. x nicht in I , bei gegebenem ϑ : a) f. $\lambda \geq 0$ ist $H = O(H_4)$; b) f. $\lambda < 0$, $x \neq \xi$ ist $H = O(H_4) + O(H_5)$.

$$\text{IV.} \quad \psi_\lambda(x) = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{2}(\varrho+\lambda+1)} G_{\varrho+\lambda+1}(4\pi\sqrt{xu}) \Psi_\lambda(u) du \quad (\sigma \geq 0, \lambda \geq \mu, \lambda g.),$$

$$\tilde{\psi}_0(x) = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{2}(\varrho+1)} G_{\varrho+1}(4\pi\sqrt{xu}) \tilde{\psi}_0(u) du,$$

$$\psi_\lambda^*(x) = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{2}(\varrho+\lambda+1)} G_{\varrho+\lambda+1}(4\pi\sqrt{xu}) \Psi_\lambda^*(u) du \quad (\lambda = \lambda_0).$$

IV gibt Integralgleichungen für $\Delta_1(x)$, I entwickelt es in eine unendliche Reihe; II stellt die Näherungen dieser Reihe dar, III schätzt die Näherungen ab. — Die im wesentlichen reell-analytischen Beweise erfordern schwierige, überaus umfangreiche Rechnungen, die Verf. naturgemäß nur andeuten konnte. Ich war mangels verfügbarer Zeit nicht in der Lage, diese Rechnungen nachzuprüfen.

A. Walfisz (Radość, Polen).

Potter, H. S. A.: Approximate equations for the Epstein zeta-function. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 501—515 (1934).

Es sei $\varphi = \varphi(m, n) = am^2 + bmn + cn^2$ eine positiv definite quadratische Form mit beliebigen Koeffizienten, $\Delta = 4ac - b^2$. Summen, die über φ laufen, sind so zu verstehen, daß man m und n alle ganzzahligen Werte erteilt, für die φ den angegebenen Bedingungen genügt. Die zugehörige Epsteinsche Zetafunktion

$$(1) \quad Z(s) = Z(\sigma + it) = \sum_{\varphi > 0} \varphi^{-s} \quad (\sigma > 1)$$

ist bekanntlich, bis auf den Pol $s = 1$, in der ganzen s -Ebene regulär und genügt der Funktionalgleichung

$$(2) \quad Z(s) = X(s) Z(1-s), \quad \text{wo} \quad X(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2s-1} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}.$$

Ist $\sigma < 0$, so kann man in (2) für $Z(1-s)$ die Reihe (1) einsetzen und bekommt

$$(1a) \quad Z(s) = X(s) \sum_{\varphi > 0} \varphi^{1-s} \quad (\sigma < 0).$$

In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf., wie gut sich $Z(s)$ unter gewissen Umständen I durch eine Teilsumme von (1), II durch eine Verknüpfung der Teilsummen von (1) und (1a) annähern läßt. Es ergibt sich folgendes: I. Voraussetzungen: $\sigma_0 > -\frac{1}{4}$, $\delta > 0$, $\gamma > 1$

fest gegeben; $x > 0$, $\lambda = \min_{\varphi > 0} \varphi$; $\sigma \geq \sigma_0$, $|t| \leq \frac{2\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{\lambda x}{\Delta}}$, $|s-1| \geq \delta$; $\psi(u) = \sum_{\varphi \leq u} 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} u$

für $u \geq 0$. Behauptung:

$$(3) \quad F(s) = Z(s) - \sum_{0 < \varphi \leq x} \varphi^{-s} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \frac{x^{1-s}}{1-s} + \psi(x) x^{-s} = O(x^{\frac{1}{2}-\sigma}),$$

gleichmäßig in jedem festen Streifen $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. — Will man in (3) die Funktion $\psi(x)$ wegschaffen, so kann man sie z. B. mit $O(x^{\frac{1}{2}})$ abschätzen (Landau). II. Ist Δ eine positive Konstante, $x > A$, $y > A$, $4\pi^2 xy = \Delta t^2$, $-\frac{1}{8} \leq \sigma \leq \frac{7}{8}$, so gilt

$$(4) \quad Z(s) - \sum_{0 < \varphi \leq x} \varphi^{-s} - X(s) \sum_{0 < \varphi \leq y} \varphi^{s-1} = O\left\{x^{\sigma-\frac{1}{2}} \left(\frac{x+y}{|t|}\right)^{\frac{1}{2}} \log t\right\}.$$

Den gemeinsamen Ausgangspunkt für (3) und (4) bildet die für $\sigma > -\frac{1}{4}$, $s \neq 1$, $x > 0$ gültige Darstellung

$$(5) \quad F(s) = 2s \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2s-1} \sum_{\varphi} \varphi^{s-1} \int_{\xi}^{\infty} u^{-2s} J_1(u) du,$$

wobei $\xi = 4\pi \sqrt{\frac{x\varphi}{\Delta}}$ und J_1 die Besselsche Funktion erster Art ist. (5) folgt ohne Schwierigkeit aus der Landauschen absolut und gleichmäßig konvergenten Reihenentwicklung

$$\int_0^x \psi(u) du = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{\varphi > 0} \frac{1}{\varphi} J_2(\xi).$$

(3) und (4) ergeben sich aus (5), indem man für $J_1(u)$ das Hauptglied $\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{3}{4}\pi\right)$ der asymptotischen Entwicklung einsetzt und hierauf ähnlich verfährt, wie es Hardy-Littlewood [Math. Z. 10 (1921)] zum Beweise entsprechender Formeln bei $\zeta(s)$ getan haben (beim

Analogon von (5) benutzten sie allerdings die nur bedingt konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\pi u$,

was rechnerisch nicht so bequem ist). Es sei noch erwähnt, das Hardy-Littlewood später [Proc. London Math. Soc. 29 (1928)] auf anderem Wege $\zeta^2(s)$ behandelt und bei der (4) entsprechenden Formel dasselbe Restglied $O\left\{x^{\sigma-\frac{1}{2}} \left(\frac{x+y}{|t|}\right)^{\frac{1}{2}} \log t\right\}$ gefunden haben. A. Walfisz.

Titchmarsh, E. C.: On Epstein's zeta-function. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 485—500 (1934).

Für die der quadratischen Form $m^2 + an^2$, $a > 0$, entsprechende Zetafunktion

$$Z(s) = Z(\sigma + it) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m^2 + an^2)^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

welche bekanntlich, bis auf den Pol $s = 1$, in der ganzen Ebene regulär ist, will Verf.

$$Z\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{2}} \log^3 t)$$

nachweisen. — Mit Hilfe eines Potterschen Satzes (vgl. vorstehend besprochene Arbeit, unter I) läßt sich $Z\left(\frac{1}{2} + it\right)$ auf eine endliche Summe der Gestalt $\sum \sum (m^2 + an^2)^{-\frac{1}{2} - it}$ zurückführen, und diese weiter auf $\sum \sum (m^2 + an^2)^{-it}$, mit geeigneten zweidimensionalen Summationsgebieten. — Es scheint mir, daß die Titchmarshschen Überlegungen nicht ganz einwandfrei sind, z. B. aus folgendem Grunde: Ich kann nicht einsehen, warum die S. 495, Zeile 8, erwähnten Quadrate die Voraussetzungen von Lemma 8 erfüllen sollen. Es ist doch mit den Annahmen vereinbar, daß in der rechten unteren Ecke eines solchen Quadrates $x - y\sqrt{a} = 2A_2L$, in der linken unteren $x - y\sqrt{a} < 0$, also irgendwo im Quadrate $x - y\sqrt{a} = 0$, $F_{xx} = F_{yy} = 0$ ist. Das ist z. B. unter Umständen der Fall, wenn $l > 2A_2L$, d. h. $L > 2A_2A_1^{-1}t$, was ja vorkommen kann. — Im übrigen ist die Arbeit schwer lesbar, und ich habe sie nicht durchweg verstehen können. Vielleicht liegt das an der Art, wie mit den O - und A -Zeichen gerechnet wird, und an gewissen Schwierigkeiten geometrischer Herkunft, die der Methode schon an sich anhaften und durch die ziemlich allgemeine Fassung einiger Hilfssätze noch gesteigert werden. An mehreren Stellen wäre wohl eine wesentlich eingehendere Durchführung der Rechnungen willkommen gewesen. A. Walfisz.

Vinogradov, I.: On a certain trigonometrical expression and its applications in the theory of numbers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr 5, 195—203 u. engl. Zusammenfassung 203—204 (1933) [Russisch].

Verf. gibt einige Anwendungen der Kloostermannschen Summen $(a, b) = \sum_{x=1}^{p-1} e^{ax+bx'}$,

wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind, p eine ungerade Primzahl, für welche

$xx' \equiv 1 \pmod{p}$ und $r = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ ist. Zunächst werden elementare Eigenschaften dieser Summen angegeben und auf Ausdrücke der Form: $\psi(a, b) = \sum e^{ax+by}$ angewandt, wo x und y die Kongruenz $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \equiv \kappa \pmod{p}$ erfüllen, wobei $0 \leq x \leq p-1$, $0 \leq y \leq p-1$ und $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ beliebige ganze Zahlen sind, für welche $\beta^2 - 4\alpha\gamma \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Es ergeben sich die folgenden Sätze: I. „Let the integers U and V satisfy the conditions $0 < U < p$; $0 < V < p \dots$ Then we have for the number T of solutions of the congruence $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \equiv \kappa \pmod{p}$, where $0 < x \leq U$; $0 < y \leq V$, the

following formula $T = \frac{UV}{p} + \theta 2p^{\frac{1}{2}} (\log p)^{\frac{1}{2}} (|\theta| \leq 1)$.“ II. $\sum_{x=0}^{U-1} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{p} \right) < 2p^{\frac{1}{2}} \log p$.

— Aus dem II. Satz folgt insbesondere, wenn man $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ setzt:

III. Die Anzahl der ganzen Zahlen x mit $0 \leq x \leq U-1$, $\left(\frac{x}{p}\right) = \varepsilon$, $\left(\frac{x+1}{p}\right) = \varepsilon_1$, $\varepsilon \varepsilon_1 = \pm 1$ [Legendresche Symbole] ist gleich $\frac{U}{4} + \theta p^{\frac{1}{2}} \log p$, wobei $|\theta| \leq 1$. Ref.

möchte hierzu bemerken, daß eine wichtige vom Verf. benutzte Abschätzung (S. 203, Zeile 3) durch Pólya-Schur bereits 1918 in den Gött. Nachr. bewiesen worden

ist. — Die Note enthält eine Reihe störender Druckfehler, z. B. S. 196, Zeile 1 lies $\sum_{x=1}^{p-1}$ statt $\sum_{x=1}^{p-1}$, S. 199, Zeile 15 lies $(2\alpha x + \beta y)$ statt $2\alpha x + \beta$. *Lubelski* (Warszawa).

Vinogradov, I.: Some trigonometrical polynomes and their applications. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr 6, 249—254 u. engl. Zusammenfassung 254—255 (1933) [Russisch].

Verf. wendet das in der soeben besprochenen Arbeit benutzte Verfahren auf die allgemeineren Summen $\Phi(a, b) = \sum_{x=1}^{p-1} r^{ax^2+bx}$ und $(\kappa, a, b) = \sum_{x=1}^{p-1} \varrho^{\kappa \text{ ind } x} r^{ax+bx'}$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{p-1}}$ an. Es ergibt sich hierbei: Es sei T die Anzahl der n -ten Potenzreste, T_0 die Anzahl der primitiven Wurzeln (mod p) der Form $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $1 \leq x \leq U < p$. Dann folgt $T = \frac{U}{n} + \theta 2p^{\frac{1}{2}} \lg p$; $T_0 = U \frac{\varphi(p-1)}{p-1} + \theta 2^{\kappa+1} p^{\frac{1}{2}} \lg p$, $|\theta| \leq 1$ (Bezeichnungen wie oben). *Lubelski* (Warszawa).

Vinogradov, I.: New applications of trigonometrical polynomes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 10—14 u. engl. Zusammenfassung 14 (1934) [Russisch].

Die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeiten werden hier weiter entwickelt und zum Beweis des folgenden Satzes verwendet: „If p be a prime number > 7 ; s be not divisible by p , m and n be divisors of $p-1$, $1 < m < p-1$; $1 < n < p-1$, then we have for the number $T_{m,n}$ of the couples $x, x+s$; $x=1, 2, \dots, U$; $1 < U < p$, where $\text{ind } x \equiv \alpha \pmod{m}$, $\text{ind}(x+s) \equiv \beta \pmod{n}$, the following formular: $T_{m,n} = \frac{U}{mn} + \theta 2p^{\frac{1}{2}} \log p$, $|\theta| < 1$.“ Ist aber $x+s$ eine primitive Wurzel, so beträgt die entsprechende Anzahl $T_m = \frac{U \varphi(p-1)}{m(p-1)} + \theta' 2^{\sigma+1} p^{\frac{1}{2}} \log p$, wo $|\theta'| \leq 1$ und σ die Anzahl der verschiedenen Primteiler der Zahl $p-1$ bezeichnet. Sind zudem x und $x+s$ gleichzeitig primitive Wurzeln, so ist

$$T_0 = U \left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1} \right)^2 + \theta' 2^{2\sigma+1} p^{\frac{1}{2}} \log p.$$

Lubelski (Warszawa).

Vinogradov, I.: New asymptotical expressions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 49—51 u. engl. Zusammenfassung 51 (1934) [Russisch].

Das in den vorstehend besprochenen Arbeiten benutzte Verfahren wendet Verf. auf die Kongruenz $\xi x^s \equiv \kappa \pmod{p}$ an, wo $\xi = 1, 2, \dots, U$; $x = 1, 2, \dots, V$ ist und erhält folgende Sätze: I. „For the number T of solutions of the congruence $\xi x^s \equiv \kappa \pmod{p}$, where $1 \leq \xi \leq U$, $1 \leq x \leq V$, $U < p$, $V < p$ and n is the greatest common divisor of s and $p-1$, we have: $T = \frac{UV}{p} + R$, $|R| < 2s^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} (\lg p)^2$, if $1 < n < p-1$; $|R| < 3s^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} (\lg p)^2$, if $n = 1$.“ — II. „For the number T of cases when x , $\text{ind } x$ and $\text{ind}(x+h)$ simultaneously satisfy the conditions: $1 \leq x \leq U$; $1 \leq \text{ind } x \leq V$; $1 \leq \text{ind}(x+h) \leq W$, where h is not divisible by p , and $U < p$, $V < p$, $W < p$, we have $T = \frac{UVW}{(p-1)^2} + \theta 4p^{\frac{1}{2}} (\lg p)^3$.“ Verf. gibt zum Schluß eine Berichtigung und Verschärfung der kleinstmöglichen Grenze von x , wobei $x > 0$, $\left(\frac{x}{p}\right) = \varepsilon$, $\left(\frac{x+1}{p}\right) = \varepsilon_1$, $\varepsilon \varepsilon_1 = 1$ (Legendresche Symbole). *Lubelski* (Warszawa).

Vinogradov, I.: Trigonometrical polynomials for complicated moduli. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 225—229 u. engl. Zusammenfassung 229 (1934) [Russisch].

Verf. gibt zunächst ohne Beweis Verallgemeinerungen einiger Sätze seiner vorst. besprochenen Arbeiten. Sodann entwirft er u. a. den Beweis der folgenden Abschätzungen: I. Es sei T die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $yx^s \equiv k \pmod{p}$, wobei $1 \leq y \leq U$; $0 < U < p$; $1 \leq x \leq V$, $0 < V < p$, U, V, k und s konstante Zahlen sind und p eine ungerade Primzahl ist, in diesem Fall ist $T = \frac{UV}{p} + O(p^{\frac{1}{2}} (\lg p)^2)$. —

II. Sind a und b konstante durch die Primzahl p nicht teilbare Zahlen und ist $r = e^{\frac{2\pi i}{p}}$,

so ist $\sum p^a x^i + b \xi^i = O(p^i)$, wobei x und ξ vollständige Restsysteme (mod p) durchlaufen (Verallgemeinerungen dieser Formel findet man bei Mordell, dies. Zbl. 5, 246; Davenport, dies. Zbl. 6, 295).

Lubelski (Warszawa).

Analysis.

● Landau, Edmund: Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Groningen: P. Noordhoff, N. V. 1934. 368 S. Fl. 12.—.

Einerseits ist dies Buch ein von der großen systematischen Kraft und einzigartigen Sorgfalt des Verf. geprägtes Lehrbuch. Ohne auf irgendwelche Anwendungen einzugehen, wird in zwei Teilen, von denen der erste die Differentialrechnung, der zweite die Integralrechnung behandelt, die klassische Infinitesimalrechnung aufgebaut; dem ersten Teil vorangehend werden in einer kurzen Einleitung gewisse prinzipielle elementare Fragen (wie „endliche und unendliche Zahlenmengen“) behandelt, und der zweite Teil schließt mit einer (besonders einfachen) Darstellung der Elemente der Theorie der Gammafunktion und der Theorie der Fourierreihen. An vielen Stellen wird der Leser neuartige Wendungen und Vereinfachungen finden, und mehr zielbewußt als wohl in irgendeinem anderen Lehrbuch ist immer bei den Definitionen (wie z. B. der des Logarithmus) und den Beweisen derjenige Weg eingeschlagen, welcher für das gesteckte Ziel der kürzeste und einfachste ist.

Andererseits aber hat das Buch einen Wert, der wesentlich über den rein pädagogischen eines gewöhnlichen Lehrbuches hinausgeht. Mit dem früheren Buch des Verf. „Grundlagen der Analysis“ (1930) zusammen — an welches es direkt anknüpft, und ohne dessen Heranziehung es nicht voll gewürdigt werden kann — stellt das Werk ein interessantes wissenschaftliches Dokument dar. Von berufenster Seite wird hier zum erstenmal die klassische Analysis lückenlos und in aller Ausführlichkeit entwickelt, wobei als Grundlage die fünf „Peanoschen Axiome“ gewählt sind. Obwohl — oder vielleicht gerade weil — das Werk absichtlich so „unphilosophisch“ verfaßt ist, regt es zum Nachdenken über die immer noch brennenden Grundlagenfragen an; wenn der Verf. z. B. (im Vorwort zu den „Grundlagen“) sagt: „Gewiß beweise ich nicht die Widerspruchslösigkeit der fünf Peanoschen Axiome (weil man es nämlich nicht kann)“, wird mancher Leser sich wohl fragen, wie dies eigentlich zu verstehen ist, und von welcher Einstellung aus, d. h. mit welchen Hilfsmitteln ein eventueller Widerspruchsfreiheitsbeweis zu führen wäre. Über solche, noch weitgehend ungeklärte Fragen äußert sich der Verf. nicht und überläßt die Auseinandersetzung damit dem Leser.

H. Bohr (Kopenhagen).

Ciorănescu, Nicolas: Quelques propriétés générales des fonctions continues. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 75—81 (1933).

Eine Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, wo f stetig ist, möge die ihre Endpunkte verbindende Sehne nicht durchsetzen. Dann gibt es zu jedem positiven $h < b - a$ zwei Stellen x_1 und x_2 mit $x_2 - x_1 = h$ und $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Dies und ein wenig kompliziertere Sätze derselben Art werden ausführlich bewiesen. W. Fenchel.

Bhar, Santosh Kumar: On some remarkable points on the „graph“ of Dini's non-differentiable function $D(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin 16^n \pi x)}{2^n}$. Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 59—80 (1933).

Investigation of $D(x)$ with reference to the location of cusp and knot points on its graph; determination of various classes of points where knots and cusps occur.

Example: knots at $\frac{p}{16^q}$, p and q positive integers.

Blumberg (Columbus).

Manià, Basilio: Sull'approssimazione delle curve e degli integrali. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 36—41 (1934).

Neuer Beweis eines Satzes von Tonelli über die Approximierbarkeit eines Integrales $\int f(x, y, z') dx$, wo $z(x)$ total stetig ist, durch ein Integral $\int f(x, u, u') dx$ mit stetig differenzierbaren $u(x)$ für das $|y - u|$ beliebig klein ausfällt. Rellich.

Slouguinoff, S. P.: La méthode symbolique de Buhl. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 54 bis 58 (1934).

Bekannte Tatsachen über mehrfache Integrale werden in etwas abgeänderter Form (ohne Beweise) formuliert.

Griss (Doetinchem).

Dines, L. L., and N. H. McCoy: On linear inequalities. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 27, 37—70 (1933).

Diese Arbeit gibt eine Gesamtübersicht der Theorie der linearen Ungleichungen, die bekanntlich L. L. Dines in den letzten 15 Jahren wesentliche Beiträge verdankt. Neben einer vollständigen Behandlung der analytischen Gesichtspunkte wird auch die Beziehung zur Theorie der konvexen Körper durchaus berücksichtigt. Zum Literaturverzeichnis ist noch die inzwischen erschienene Dissertation von L. N. H. Bunt (dies. Zbl. 8, 78) hinzuzufügen.

I. J. Schoenberg (Princeton).

Aumann, Georg: Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 3, 403—415 (1933).

Wegen der Bezeichnungen und Begriffsbildungen vergleiche das Referat einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 8, 56). Es wird der Jensensche Begriff der konvexen Funktion in der folgenden Weise weitgehend verallgemeinert: Es sei $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ eine im Bereich $a < x_\mu < b$ definierte Funktion mit $\alpha \leq \Phi \leq \beta$. Ferner seien $M_1(x_1, \dots, x_n), \dots, M_m(x_1, \dots, x_n)$ Mittel (vgl. das genannte Referat) im Intervall $a \leq x \leq b$ und $N(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein Mittel in $\alpha \leq \xi \leq \beta$. Dann heißt Φ konvex bezüglich $\{M_1, \dots, M_m; N\}$, wenn für jede Matrix

$$\begin{array}{ccc} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{array}, \quad a < x_{\mu\nu} < b$$

die Ungleichung

$$\Phi(M_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, M_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \leq N(\Phi(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, \Phi(x_{1n}, \dots, x_{mn}))$$

erfüllt ist. (Sind M_1, \dots, M_m, N arithmetische Mittel, so kommt man auf die Definition der gewöhnlichen konvexen Funktionen von m Variablen zurück.) Die in diesem allgemeinen Sinne (voraussetzungsgemäß beschränkten) konvexen Funktionen erweisen sich als stetig. Der Hauptsatz des Verf. lautet: Ist $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ konvex bezüglich $\{M_1, \dots, M_m; N\}$, so ist Φ auch konvex bezüglich der Obermittel $\{M'_1, \dots, M'_m; N'\}$, mit anderen Worten: in der obigen Ungleichung kann man von n zu $n+1$ übergehen, wenn man die Mittel $M_1, \dots, M_m; N$ durch ihre Obermittel ersetzt. Es werden auch Bedingungen dafür aufgestellt, daß hierbei das Kleinerzeichen erhalten bleibt. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Mittel $M_1, \dots, M_m; N$ transformierte arithmetische Mittel sind. Dann sind die Obermittel von derselben Art, und zwar mit den gleichen Transformationsfunktionen (vgl. dies. Zbl. 8, 56). Folglich gestattet der genannte Satz Ungleichungen zwischen solchen Mitteln von n Argumenten durch Induktion nach n aus dem meist einfachen Fall $n=2$ herzuleiten. Die bekannten Mittelwertungleichungen von Cauchy, Hölder, Jensen, Minkowski und viele andere sind spezielle Fälle hiervon. Sie sind somit in eine sehr allgemeine Klasse von Ungleichungen eingeordnet. (Auf ganz andere, allerdings weniger umfassende Weise ist dies von Jessen durchgeführt worden [vgl. dies. Zbl. 3, 301; 6, 299; 7, 302].) Der Verf. hebt auch weitere bisher nicht bekannte Spezialfälle hervor.

W. Fenchel (Kopenhagen).

● Pearson, Karl: Tables of the incomplete beta-function. London: „Biometrika“ office, univ. coll. 1934. LIX, 494 S. 55/-.

Fock, V.: On a certain definite integral connected with the cylindric function $K_\nu(x)$. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 443—444 u. engl. Zusammenfassung 444 (1934) [Russisch].

Walsh, J. L.: Note on the orthogonality of Tchebycheff polynomials on confocal ellipses. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 84—88 (1934).

Die Tchebyscheffschen Polynome $\cos n \arccos z$, welche auf der Strecke $-1 \leq z \leq 1$ mit der Belegungsfunktion $|1 - z^2|^{-\frac{1}{2}}$ orthogonal sind, besitzen die gleiche Eigenschaft auf jeder Ellipse mit den Brennpunkten $-1, +1$. Diese interessante Bemerkung wird in der vorliegenden Note auf eine etwas umständliche Weise be-

wiesen. Zugleich wird die Frage nach analogen Kurvenpaaren gestellt. (Aus der asymptotischen Formel der orthogonalen Polynome kann entnommen werden, daß derartige Kurvenpaare notwendig Kreisbilder von einer und derselben Kreis-Außenabbildung sein müssen.) Szegő (Königsberg i. Pr.).

Vignaux, J. C.: Über summable Doppelintegrale. An. Acad. Nac. Ci. exact. Fis. y Nat., Buenos Aires 3, 158—159 (1933) [Spanisch].

Abramseco, N.: Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynomes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 11—16 (1933).

Einige Bemerkungen allgemeiner Art zu den Jacobischen Entwicklungen, die nach den Potenzen eines festen Polynoms p -ten Grades mit Polynomkoeffizienten $(p-1)$ -ten Grades fortschreiten. Der Fall $p=2$ wird eingehender betrachtet. Szegő.

Jackson, Dunham: Note on relations connecting certain cases of convergence in the mean. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 152—158 (1934).

In einer früheren Note (Bull. Amer. Math. Soc. 39, 889—906; vgl. dies. Zbl. 8, 111) bewies Verf. durch Anwendung des S. Bernsteinschen Satzes das folgende Theorem: Es sei $f(x)$ stetig und 2π -periodisch, $T_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom n -ter Ordnung,

$$G_{ns} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^s dx, \quad s > 0.$$

Dann gilt die Abschätzung

$$|f(x) - T_n(x)| \leq 4(nG_{ns})^{\frac{1}{s}} + 5\varepsilon_n,$$

wobei ε_n die beste Approximation von $f(x)$ durch trigonometrische Polynome n -ter Ordnung bezeichnet. Mit Hilfe dieses Satzes werden obere Abschätzungen von $G_{n\sigma}$ ermittelt, wenn G_{ns} bekannt und $\sigma > s$ ist. Für $\sigma < s$ liefert schon die Höldersche Ungleichung derartige Abschätzungen. Aus der genügend starken Konvergenz von G_{ns} gegen Null kann auf diese Weise die Konvergenz von $G_{n\sigma}$ gegen Null geschlossen werden. Ähnliche Betrachtungen führen zu elementaren Konvergenzkriterien für Fouriersche Reihen. — Analoge Sätze gelten bei Polynomapproximationen.

Szegő (Königsberg i. Pr.).

Karamata, J.: Quelques théorèmes de nature tauberienne. Studia Math. 4, 4—7 (1933).

Es sei $\varphi(x) > 0$, $\varphi(ux) = O[\varphi(x)]$ bei $x \rightarrow \infty$ für jedes $u > 0$. Aus

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} dA(t) = o\{\varphi(1/\sigma)\}, \quad \sigma \rightarrow 0$$

folgt

$$A(x) = o[\varphi(x)], \quad x \rightarrow \infty,$$

wenn außerdem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \min_{x < x_1 < \lambda x} \frac{A(x_1) - A(x)}{\varphi(x)} > -w(\lambda),$$

wo $w(\lambda) \rightarrow 0$ wenn $\lambda \rightarrow 1 + 0$. — Beantwortung einer Frage von Zygmund: Aus

$$(1-r) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu = s + o\left\{\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, \quad r \rightarrow 1-0,$$

folgt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n s_\nu = s + o[\psi(n)], \quad n \rightarrow \infty,$$

jedenfalls wenn $s_n \geq s - M\psi(n)$, $M > 0$, und $\psi(ux) = O[\psi(x)]$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Haviland, E. K., and Aurel Wintner: On the Fourier-Stieltjes transform. Amer. J. Math. 56, 1—7 (1934).

Es sei

$$L(t; \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} d\sigma(\xi), \quad V_{-\infty}^{\infty}(\sigma) < +\infty.$$

Die Verf. stellen sich die Aufgabe, die asymptotische Verteilung der Funktion $L(t; \sigma)$, $-\infty < t < +\infty$, zu untersuchen. Gemäß der Zerlegung $\sigma(\xi) = \sigma'(\xi) + \sigma''(\xi)$, σ' stetig und σ'' Treppenfunktion, sei $L(t; \sigma) = L(t; \sigma') + L(t; \sigma'')$. Bekanntlich ist $\mathfrak{M}_t\{|L(t; \sigma')|^2\} = 0$ (Schoenberg, Math. Z. 30) was hier mit $(1) \mathfrak{M}_t\{|L(t; \sigma')|\} = 0$ gleichbedeutend ist. Daraus ergibt sich das merkwürdige Ergebnis: Die asymptotische Verteilungsfunktion der Funktion $L(t; \sigma)$ in der komplexen Ebene ist identisch mit der asymptotischen Verteilungsfunktion der fastperiodischen Funktion $L(t; \sigma')$. Tatsächlich wird aus (1) gefolgert, daß sämtliche Momente beider Verteilungsfunktionen entsprechend gleich sind.

I. J. Schoenberg (Princeton).

Ingham, A. E.: A note on Fourier transforms. J. London Math. Soc. 9, 29—32 (1934).

The following theorem is proved. Let $\epsilon(y)$ be a positive function, $\epsilon(y) \downarrow 0$ as $y \uparrow \infty$. Then the convergence of the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(y)}{y} dy$ is a necessary and sufficient condition that there should exist a non-null function $f(x)$ vanishing outside an assigned interval $(-l, l)$ and having a Fourier transform $g(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-xyi} dx$, such that $g(y) = O\{\exp(-|y|\epsilon(|y|))\}$ as $|y| \rightarrow \infty$. J. D. Tamarkin (Providence, R. I.)

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: A remark on Fourier transforms and functions analytic in a half-plane. Compositio Math. 1, 98—102 (1934).

Soit $L_p(p \geq 1)$ la classe des fonctions $f(x)$ sommables dans $(-\infty, \infty)$ et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx$ reste bornée. $G(u)$ est la transformée de Fourier de $g(x)$, dans L_q et l'on écrit $G(u) = L^q G(u; a)$, si en posant: $G(u; a) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^a g(x) e^{-iux} dx$,

on a $\left[\int_{-\infty}^{\infty} |G(u; a) - G(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow \infty$, avec $G(u) \in L_q$. $f(x)$ est une fonction-limite de $f(z)$ ($z = x + iy$), analytique pour $y > 0$, si pour presque toutes les valeurs de x , $f(z)$ tend vers $f(x)$ lorsque $z \rightarrow x$ suivant un chemin non tangent à Ox . Les auteurs considèrent la classe \mathfrak{N}_p des fonctions $f(z)$ anal. pour $y > 0$, possédant une

fonction limite $f(x) \in G_p$ et représentables par l'intégrale $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi$. Ils

démontrant que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$, transformée dans L_p d'une fonction $\varphi(u) \in G_p$, soit une fonction-limite d'une fonction $f(z) \in \mathfrak{N}_p$, est que $\varphi(u) = 0$ pour $u > 0$.

S. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Widder, D. V.: The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. Trans. Amer. Math. Soc. 36, 107—200 (1934).

Es handelt sich um eine wesentlich neue Umkehrformel für Laplace-Stieltjesche Integrale

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} d\alpha(t), \quad (1)$$

$\alpha(t)$ von beschränkter Schwankung in $[0, R]$ für jedes $R > 0$. Die früher bekannte Umkehrformel erinnert an die Cauchyschen Formeln für die Koeffizienten einer Potenzreihe, die neue Formel ist dagegen eine sinnmäßige Übertragung der Maclaurinschen Formeln. — Verf. führt zwei Operatoren $S_t[f(x)]$ und $L_t[f(x)]$ ein, wobei

$$S_t[f(x)] = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,t}[f(x)], \quad L_t[f(x)] = \lim_{k \rightarrow \infty} L_{k,t}[f(x)],$$

$$S_{k,t}[f(x)] = f(\infty) + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_{k/t}^{\infty} u^k f^{(k+1)}(u) du,$$

$$L_{k,t}[f(x)] = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Die Hauptsätze lauten jetzt: Wenn $f(z)$ durch (1) in einer Halbebene darstellbar ist, so ist

$$S_t[f(x)] = \frac{1}{2} [\alpha(t+0) + \alpha(t-0)]. \quad (t > 0)$$

An einem Punkte, wo $\alpha(t)$ rechts- und linksseitige endliche Ableitungen hat, also fast überall, ist

$$L_t[f(x)] = \frac{1}{2} [\alpha'_+(t) + \alpha'_-(t)].$$

Wenn $f(x)$ samt allen Ableitungen in $0 < x < \infty$ stetig sind und

$$\frac{1}{k!} \left| \int_x^\infty u^k f^{(k+1)}(u) du \right| < M, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

so ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-xt} dS_{k,t}[f(x)] = f(x) - f(\infty),$$

wo $S_{k,0}[f(x)] = f(\infty)$. Ein ähnlicher Satz gilt für den L -Operator. Diese beiden Sätze liefern die Eindeutigkeitssätze der Darstellung. — Ferner bekommt der Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion $f(x)$ durch ein absolut konvergierendes Laplace-Stieltjessches Integral (Sätze von S. Bernstein, Hausdorff und Verf.). — Als Spezialfälle folgen Koeffizientendarstellungen für Dirichletsche und Fakultätenreihen. Bemerkenswert sind auch die Umkehrformeln

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{t+x}, \quad \frac{1}{2} [\alpha(t+0) + \alpha(t-0)] = S_t\{L_y[g(x)]\}.$$

Anknüpfend an ältere Sätze von Laguerre zeigt der Verf., wie die Veränderungen in dem Wachstumssinne von $\alpha(t)$ sich in der Verteilung der Nullstellen von $f(x)$ und ihre Ableitungen abbilden. — Wenn $\alpha(t)$ in einer Halbebene analytisch ist, haben die Umkehrformeln und die Nullstellensätze auch im Komplexen einen Sinn. — Schließlich behandelt der Verf. mit seinen Methoden das Hausdorffsche Momentproblem. Hier treten neue Operatoren auf, und zwar sind $S_t(\mu_n)$ und $L_t(\mu_n)$ die Grenzwerte von bzw.

$$S_{k,t}(\mu_n) = -\mu_\infty - (-1)^{k+1} \sum_{i=n+1}^\infty \frac{(i+k)!}{i! k!} \Delta^{k+1} \mu_i, \quad n = \left[\frac{kt}{1-t} \right]$$

$$L_{k,t}(\mu_n) = (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n! k!} \Delta^k \mu_n.$$

Die Funktion $S_t(\mu_n)$ liefert eine Lösung des Momentproblems.

E. Hille.

Reihen:

Vignaux, J. C.: Über die oszillierende Reihe von Borel. An. Acad. Nac. Ci. exact. Fis. y Nat., Buenos Aires 3, 155—156 (1933) [Spanisch].

Vignaux, J. C.: Reihen, die sich mit der verallgemeinerten Methode von Le-Roy summieren lassen. An. Acad. Nac. Ci. exact. Fis. y Nat., Buenos Aires 3, 156—157 (1933) [Spanisch].

Rey Pastor, Julio: Theorie der linearen Limitierungs- und Summierungsverfahren. Publ. Fac. Ci. exact., Fis. y Nat., Univ. Buenos Aires B Nr 12, 51—222 (1932) [Spanisch].

Die Arbeit will eine zusammenfassende Darstellung der Theorie divergenter Prozesse geben. Es handelt sich dabei bekanntlich darum, einer konvergenten oder nicht konvergenten Folge durch lineare Mittelbildung (Multiplikation mit einer Matrix) eine neue Folge zuzuordnen und nach deren Konvergenzverhalten zu fragen. Besonders Interesse verdienen natürlich jene Mittelbildungen, die konvergente Folgen wieder in solche überführen (konvergenzserhaltende Verfahren) und womöglich auch den Grenzwert fest lassen (permanente Verfahren), darüber hinaus aber noch gewissen divergenten Folgen konvergente zuordnen. Ähnliche Aufgaben werden für Funktionen $f(x)$ bei $x \rightarrow \infty$, divergente Reihen und Integrale behandelt [vgl. hierzu Knopp, Math. Z. 31 (1930)]. — Nach einer einleitenden Übersicht folgen allgemeine Aus-

fürungen, die sich um den Konvergenzerhaltungssatz gruppieren, den linearen Charakter der Verfahren hervorheben und besonders jenen Verfahren Beachtung schenken, deren Matrix nur Elemente einerlei Zeichens enthält: Sie bringen höchstens eine Verengung des Oszillationsintervalls mit sich; aus den hinreichenden und notwendigen Bedingungen für Permanenz folgt z. B., daß der Reihmultiplikationssatz von Mertens der bestmögliche ist: Zu jeder nicht absolut konvergenten Reihe kann man eine andere so finden, daß die Cauchysche Produktreihe divergiert. Es folgen einige Kapitel (III—V), die speziellen Verfahren gewidmet sind (unter anderem C, E, B). Das VI. Kapitel gibt in einem etwas allgemeineren Rahmen einen Überblick über die Verfahren von Nörlund und Riesz sowie über einige asymptotische Ausdrücke divergenter Reihen. Das VII. Kapitel greift erneut die allgemeine Theorie auf und behandelt die Fragen nach Umkehrbarkeit, Äquivalenz und Übereinstimmung der Limitierungsergebnisse verschiedener Verfahren sowie nach der Beständigkeit bei arithmetischen Operationen, wie Hinzufügen oder Fortlassen von Anfangsgliedern. (Die Fragen nach der Größe der Konvergenzfelder und der Vergleich dieser Felder bei verschiedenen Verfahren sind in den speziellen Kapiteln mitbehandelt.) Im letzten Kapitel endlich wird die Summierung von Potenzreihen angeschnitten. — Leider beschränkt sich die umfangreiche Darstellung sehr auf die formale Seite des Problemkreises; die funktionentheoretischen Einsichten sind entschieden zu kurz gekommen, die Anwendungen der Limitierungsverfahren bei Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen mit keinem Wort berührt — nicht einmal der Satz von der C_1 -Summierbarkeit der formalen Fourierreihe einer stetigen Funktion ist erwähnt. Ein Verzeichnis der einschlägigen Literatur ist nicht beigegeben. (Vgl. hierzu auch das Referat dies. Zbl. 8, 154, Rey Pastor.) Ulrich (Marburg, Lahn).

Llosá, Ricardo San Juan: Summation von Reihen mit dem Konvergenzradius Null und halbanalytische Fortsetzung. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **30**, 122—193 (1933) [Spanisch].

Verf. will neue Methoden entwickeln, um Potenzreihen mit verschwindendem Konvergenzradius eine Summe zuzuschreiben. Diese Summen werden in einer Klasse quasianalytischer Funktionen gesucht, die durch ihre Winkelableitungen in einem Punkte voll bestimmt sind; als halbanalytische Fortsetzung einer solchen Reihe $\sum u_n z^n$ wird dann eine Funktion genommen, die bei $z = 0$ die Winkelableitungen $u_n n!$ besitzt, gerade als ob die Funktion dort regulär analytisch wäre. Als Summationsmethoden verwendet der Verf. Momentenverfahren, die dann mit dem in geeigneter Weise verallgemeinerten Stieltjesschen Momentenverfahren verglichen werden. Dieses läuft darauf hinaus, zunächst das Momentenproblem

$$(-1)^n u_n = \int_0^\infty \alpha(t) t^n dt$$

anzugreifen, und wenn es eine Lösung $\alpha(t) \geq 0$ besitzt, die bestimmt werden kann, der Reihe $\sum u_n z^n$ das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(t)}{1+tz} dt$$

als verallgemeinerte Summe zuzuordnen. — Nach einer Einführung in den Problemkreis gibt der Verf. zunächst eine Systematik der Summationsverfahren im Anschluß an Perron, besonders im Hinblick auf die Momentenverfahren, unter denen wieder die mit regulärer Erzeugenden herausgehoben werden. Er behandelt dann das Momentenproblem, wo nach Zusammenstellung bekannter Ergebnisse eine Lösung des in gewisser Weise verallgemeinerten Problems gegeben wird, und studiert dann dieses in bezug auf seine Anwendungen zur Reihensummierung: Es werden einige Verfahren in Analogie mit dem Stieltjesschen Verfahren und dem Laplaceschen Integral dargestellt und ein Vergleich dieser Verfahren nach Übereinstimmung der Ergebnisse

mit dem des Stieltjesschen Verfahrens unternommen. Schließlich wird die halbanalytische Fortsetzung behandelt, mit der analytischen verglichen und eine Reihe von Entwicklungsmethoden gegeben, die ihr mit dieser gemein sind, wie Laplacesches Integral, Fakultätenreihen, Polynomreihen. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

Takahashi, Tatsuo: Remarks on the Cesàro summability of divergent series. Proc. Imp. Acad. Jap. **9**, 476—479 (1933).

The author proves the following theorem, and applies it for derivation of some well known Tauberian theorems. If (*) $ns_n \geq (n-1)s_{n-1}$, $n > 1$, then $(1/n)(s_1 + \dots + s_n) \rightarrow L$ implies $s_n \rightarrow L$. It should be observed, however, that condition (*) implies that $\{s_n\}$ is „langsam abfallend“ in the sense of R. Schmidt [Math. Z. **22**, 89—152 (1925)] so that the result of the author is a special case of Schmidt's Theorem X (p. 150).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Orlicz, W.: Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen. Studia Math. **4**, 27—32 (1933).

Der folgende, bereits in C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 157—158 (1932) mitgeteilte Satz (vgl. dies. Zbl. **3**, 252) wird bewiesen: für jedes in (L^2) vollständige Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ existiert eine Zahlenfolge $c_\nu \rightarrow 0$, so daß fast überall

$$(*) \quad \limsup \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \right| = +\infty$$

gilt. Ferner wird der analog zu beweisende Satz mitgeteilt: ist ein Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ mit $|\varphi_\nu(x)| \leq K$ und eine Zahlenfolge $\{d_\nu\}$ mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^2 = +\infty$ vorgegeben, so gibt es eine Vorzeichenverteilung $\varepsilon_\nu = \pm 1$, so daß für $c_\nu = \varepsilon_\nu \cdot d_\nu$ die Beziehung (*) in einer Menge von positivem Maße besteht. Ähnliche Sätze werden für die asymptotische Konvergenz von Orthogonalreihen bewiesen, wobei der folgende, schon in C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 2118—2120 (1932) ohne Beweis angegebene und in der vorliegenden Arbeit bewiesene, an sich interessante Hilfssatz verwendet wird: Ist $f_n(x)$ eine Folge meßbarer Funktionen in $(0, 1)$ und konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$ asymptotisch für jede Indexfolge $\{n_i\}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ fast überall.

Birnbäum (Lwów).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Theorems concerning Cesàro means of power series. Proc. London Math. Soc., II. s. **36**, 516—531 (1934).

Let $f(z)$, $z = re^{i\theta}$ be analytic in the unit circle $r < 1$, and

$$M_\lambda(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^\lambda d\theta \right)^{1/\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

If $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ let $\sigma_n^k(f, z)$ denote the Cesàro sum s of the series $\sum c_n z^n$ of order $k > -1$. It is well known that, when $\lambda \geq 1$ we have: (I) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^k(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \leq A M_\lambda^k(1)$, where A depends only on λ and k ; (II) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^k(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$; (III) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^k(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \rightarrow M_\lambda^k(1)$, and (IV) $\sigma_n^k(e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$ for almost all θ , provided $M_\lambda(1, f) < \infty$. The authors show that results (I—III) hold even for $\lambda < 1$, provided $k > \frac{1}{\lambda} - 1$, and become false (for appropriate f) if $k \leq 1/\lambda - 1$. They also show that (IV) holds when $k > [1/\lambda]$, leaving open the question whether this is the best possible result.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Hardy, Godfrey Harold, and John Edensor Littlewood: Some new convergence criteria for Fourier series. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 3, 43—46 (1932).

Let $\varphi(t)$ be an even integrable function and (*) $\varphi(t) \sim \sum_1^\infty a_n \cos nt$. The authors prove that $\sum_1^\infty a_n = 0$, provided (I) $\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)| du = o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right)$ and (II) $a_n = O(n^{-\delta})$, $\delta > 0$, the same being also true if (I') $\varphi(t) = o(1)$ and (II') $a_n = O(1/n)$. They show that these results are "the best possible" in various senses. The authors consider next a modification of Borel's method of summation introduced by Valiron [*Rend. Circ. math. Palermo* 42, 267—284 (1917)], as defined by

$$s = (V \cdot l) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2} n^{1/2} l^{-1} \sum_{m=-\infty}^\infty \exp(-\frac{1}{2} m^2 n l^{-2}) s_{m+n}.$$

They prove that if (III) $\varphi(t) = o\{(\log 1/t)^{-1}\}$ then $\sum_1^\infty a_n$ is $(V \cdot l)$ summable for $1 \leq l < 2$, and, in particular, is Borel summable. A combination with some Tauberian lemmas yields the convergence of $\sum_1^\infty a_n$ provided $\varphi(t)$ satisfies (III) while (IV) $a_n > -A n^{1/2} l^{-1}$. As a generalization of Young's criterion the authors prove that $\sum_1^\infty a_n$ converges provided $\varphi(t)$ satisfies (I) and (V) $\Psi_\Delta(t) = \int_0^t |d(u^\Delta \varphi)| = O(t)$ for some $\Delta > 0$. Finally it is proved that if $a_n = O(n^{-\delta})$ and (VI) $s_n - s = a_1 + \dots + a_n - s = o(1/\log n)$ then $\chi(t) = \sum_1^\infty a_n \frac{\sin nt}{nt} \rightarrow s$ as $t \rightarrow 0$, and also, if $\sum_1^\infty a_n \cos nt$ is the Cauchy-Fourier series of $\varphi(t)$, while the conditions (VI) and $\varphi(t) = O(t^{-\Delta})$, $\Delta > 0$, are satisfied, then $\chi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du = \sum_1^\infty a_n \frac{\sin nt}{nt} \rightarrow s$ as $t \rightarrow 0$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.)

Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. V. *Fundam. Math.* 21, 168 bis 210 (1933).

Let (*) $\sum_1^n A_n(x)$, $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ be a trigonometric series and $\sum A_n(x) \left(\frac{\sin n\theta}{n\theta}\right)^j$, $j = 3, 4$ its Riemann (R. 3) and (R. 4) transforms. The (R. j) ($j = 3, 4$) upper and lower sums of (*), $\bar{R}(x)$ and $\underline{R}(x)$, are defined as \lim and \liminf as $\theta \rightarrow 0$ of the corresponding (R. j) transforms of (*). The main result of the paper is embodied in the following theorem. Let the series (*) be such that (†) $\sum_{-n}^n c_\nu c^{i\nu x} = o(n^2)$ for all x , $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \bar{c}_n$. Let $\underline{R}(x)$ be finite everywhere, and $\bar{R}(x) \geq f(x)$, where $f(x)$ is Denjoy (D) integrable. Then (*) is a Denjoy-Fourier series. The proof of the special case where $a_n, b_n = o(n)$ is considerably simpler than that of the general case of the theorem. On setting

$$F(x) = \sum_1^\infty n^{-3} B_n(x), \quad B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx,$$

$$H(x) = n^{-4} A_n(x),$$

it is readily seen that the (R. 3), (R. 4) transforms of (*) coincide respectively with $\Delta^3 F(x, \theta)/(2\theta)^3$, $\Delta^4 H(x, \theta)/(2\theta)^4$ where in general $\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x-h)$, $\Delta^r f(x, h) = \Delta \Delta^{r-1} f(x, h)$. Thus the problem is reduced to an investigation of the third and fourth generalized derivatives of a function. The author gives a thorough investi-

gation of these questions and develops a large body of theorems and lemmas which, due to the lack of space, can not be analyzed here. Only a few results of independent interest will be mentioned. We denote by $\overline{D}^j \varphi(x)$, $\underline{D}^j \varphi(x)$ the upper and lower generalized derivatives of $\varphi(x)$ of order j , defined by $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{A}^j \varphi(x, h)/(2h)^j$ and $\lim_{h \rightarrow 0} \underline{A}^j \varphi(x, h)/(2h)^j$ respectively. If $\varphi(x)$ is continuous in $a < x < b$, $\varphi'(x)$ has a unique value (finite or not), $\overline{D}^3 \varphi(x) \equiv f(x)$, where $f(x)$ is (D) integrable, and $\underline{D}^3 \varphi(x)$ is finite, then $\underline{D}^3 \varphi(x)$ is (D) integrable in $(a + \epsilon, b - \epsilon)$, and for $a < \alpha \leq x \leq \beta < b$, $\varphi'(x) = \int_{\alpha}^x dy \int_{\alpha}^y \underline{D}^3 \varphi(t) dt$

+ $c_1 x + c_2$. The same result holds if the conditions concerning $\varphi(x)$ and $\varphi'(x)$ are replaced by the following ones: $\varphi(x)$ is defined in $a < x < b$ and is approximately continuous; the approximate derivative $\varphi'_\alpha(x) < \infty$ is unique; the functions $\varphi(x)$ and $\varphi'_\alpha(x)$ have the property R^* . We say that a function $f(x)$ which is single-valued in (a, b) , whether finite or not, possesses the property R^* in that interval, if for any perfect set $P \subset (a, b)$, there exists a portion of P on which $f(x)$ is upper semi-continuous. The attention to such functions as called recently by Saks (J. London Math. Soc. 7, this Zbl. 5, 352). An analogous result is true in the case of the fourth generalized derivative. If $\varphi(x)$ is defined in an open interval I , has the property R^* and is approximately continuous, while the approximate derivative $\varphi'_\alpha(x)$ has a unique value, then, given any two points $\alpha < \beta$ of I , there is a ξ such that $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\beta - \alpha) \varphi'_\alpha(\xi)$. (IV. cf. this Zbl. 7, 346.) J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Verblunsky, S.: Some theorems on generalized Fourier constants. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 33—62 (1934).

Given a sequence of functions $\varphi_n(x)$, $a \leq x \leq b$, and a function $f(x)$, the author calls the numbers $\int_a^b f \varphi_n dx$ the generalized Fourier coefficients of f with respect to $\{\varphi_n\}$.

A series of theorems is proved, not all of which are new [see, in this connexion, Banach, Studia Math. 2, 207—220 (1930); Sidon, this Zbl. 4, 212 (1932); Paley and Zygmund, Cambridge Proc. 1930, 337—357]. We quote the following results. Let $\varphi(t)$ be a function of period 1 and satisfying the conditions $\int_0^1 \varphi dt = 0$, $\int_0^1 \varphi^2(t) dt = 1$, $\int_0^1 \varphi^4 dt = k^2$. Then there exists a sequence of positive integers n_r , such that, for every $\{a_r\}$ with $\sum a_r^2 = 1$, there exists an f , $|f| \leq 4k$, and such that $a_r = \int_0^1 f(t) \varphi(n_r t) dt$ ($r = 1, 2, \dots$). Let $\varphi_n(x)$ be a sequence of functions orthogonal and normal in $(0, 1)$, such that $\int_0^1 \varphi_n^4 dt = O(1)$ ($n = 1, 2, \dots$). Given any $\{a_r\}$, with $\sum a_r^2 = 1$, there exists a bounded f such that $a_r = \int_0^1 f \varphi_{n_r} dt$ ($r = 1, 2, \dots$). When $\{\varphi_n\}$ is the trigonometric system, we may take for $\{n_r\}$ any sequence of positive integers such that $n_{r+1}/n_r > q > 1$.

A. Zygmund (Wilno).

Bosanquet, L. S., and A. C. Offord: Note on Fourier series. Compositio Math. 1, 180—187 (1934).

In the following $f(t) \subset L(-\pi, \pi)$, s_n is the n -th partial sum of the Fourier series of $f(t)$ at $t = x$, and $\varphi(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)]$. Let $L(x)$ be a logarithmico-exponential function such that $1 \prec L(x) \preceq x$. The main theorem reads: If

$$|\varphi(t)| = O[L(1/t)], \quad (C, 1) \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

then a necessary and sufficient condition that

$$\sum_{r=1}^n \frac{S_{\nu_r}}{\nu_r} = o[L(n)], \quad (C, -1 + \delta) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

for any $\delta > 0$, is that

$$\int_i^{\pi} \varphi(u) \frac{du}{u} = o[L(1/t)]. \quad (C, k) \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

for some k . — Analogous theorem for the allied (conjugate) series.

E. Hille.

Lévy, Paul: Sur la convergence absolue des séries de Fourier. *Compositio Math.* 1, 1—14 (1934).

The author proves the theorems announced in *C. R. Acad. Sci., Paris* 196, 463—464 (1933) (see the review in this *Zbl.* 6, 198). *E. Hille* (New Haven, Conn.).

Maliev, A.: Sur la décomposition en séries de Fourier de convergence élevée des fonctions définies dans l'intervalle donné. *Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 8*, 1113 bis 1120 (1933) [Russisch].

The author continues his investigations [see this *Zbl.* 6, 345 (1935)] on the problem, important in technological applications, of improving the convergence of Fourier series, by modifying the values of the function outside a given interval. *Zygmund*.

Wang, Fu Traing: On the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means. *Proc. Imp. Acad. Jap.* 9, 568—569 (1933).

The author states, without proofs, certain generalizations of some results of Hardy concerning the summation of Fourier series by Riesz logarithmic means. For proofs he refers to a paper forthcoming in the *Tôhoku Math. J.*

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Differentialgleichungen:

Fantappiè, Luigi: Risoluzione esplicita di un sistema differenziale interessante l'elettrotecnica, mediante il calcolo degli operatori lineari. *Mem. Accad. Ital., Mat.* 4, 55—89 (1933).

Verf. führt die Auflösung des Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2 i_p}{dx^2} = \sum_1^n c_{pj} i_j + a_p \varphi(x), \quad p = 1, \dots, n$$

und den Randbedingungen $i_p(0) = i_p(1) = 0$, auf einen Spezialfall der Berechnung linearer analytischer Operatoren zurück. Die Lösung erscheint in der Form eines (natürlich leicht auswertbaren) Cauchy'schen Integrals. *Hans Leicy* (Providence).

Langer, Rudolph E.: The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 90—106 (1934).

The equation considered is $u''(s) = u(s) \{ \lambda^2 q_0(s) + \lambda q_1(s) + q_2(s, \lambda) \}$ where $q_2(s, \lambda)$ is bounded for large values of λ , $q_1(s)$ is not identically zero and $q_0(s)$ vanishes to the second order at some point. — The equation is first reduced to a normal form and is then associated with a related equation $y''(z) = y(z) \{ \lambda^2 X_0^2(z) + \lambda X_1(z) + \Omega(z, \lambda) \}$ whose solution is $\Psi(z) C(z)$ where $C(z)$ is the solution of a certain confluent hypergeometric equation and $\Psi(z)$ is an analytic and uniformly bounded in a certain fundamental region R_c . The analytical formulation of the results obtained is facilitated by the use of a variable ξ defined by means of the equation $\lambda^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} dz = \Psi^2(z) d\xi$.

H. Bateman (Pasadena).

Latshaw, V. V.: The algebra of self-adjoint boundary-value problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 39, 969—978 (1933).

Dunham Jackson (*Trans. Amer. Math. Soc.* 17, 418—424) hatte in Matrizenform notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, damit eine selbstadjungierte lineare Differentialgleichung mit linearen Randbedingungen ein selbstadjungiertes System bilden. Hier wird die Jacksonsche Matrix ausgerechnet und näher untersucht.

I. J. Schoenberg (Princeton).

Théodoresco, N.: Remarques sur le problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* 35, 249—253 (1933).

Gogoladze, V.: Cauchy's problem for a „generalized“ wave equation. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 166—168 u. engl. Zusammenfassung 169 (1934) [Russisch].

Es wird das Cauchysche Problem für die verallgemeinerte Wellengleichung

$$A_1(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_2(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_3(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} - a_2(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + a_3(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + a_4(x, y, z) u = \frac{1}{\varphi(x, y, z)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

gelöst. Das Problem wird in eine Integralgleichung transformiert mit Hilfe einer Funktion $\sigma(M, M_0) = \sigma(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, welche eine Verallgemeinerung des Newtonschen Potentials $\frac{1}{r}$ ist. Das Verfahren ist analog demjenigen, welches Soboleff für die Untersuchung der Wellengleichung in einem heterogenen Medium gegeben hat (C. R. Acad. Sci. URSS 1930, 163). Janczewski (Leningrad).

Kopradze, V.: Integralgleichungen für elektromagnetische Wellen. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 161—163 u. deutsch. Zusammenfassung 163—165 (1934) [Russisch].

Kopradze, V.: Existenzbeweis und Eindeigkeitstheorem in der Diffraktions-theorie. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 235—237 u. deutsch. Text 232—240 (1934) [Russisch].

Es wird die Lösung von Problemen der Diffraction von elektromagnetischen Wellen im Falle einer regulären Kontur gesucht. Der Verf. hat bereits [Trav. Inst. phys. math. Stekloff 5, 219 (1934)] diese Aufgabe mit Hilfe von speziellen Funktionen gelöst — jetzt werden Integralgleichungen aufgebaut, auf welche sich die Diffraktionsprobleme zurückführen lassen. Die Lösungen der Neumannschen und Dirichletschen Probleme für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

nebst dem „Ausstrahlungsprinzip“ (vgl. dies. Zbl. 8, 209):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \frac{\partial r}{\partial n} \right) = 0 \quad (r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2})$$

werden in der Form

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \nu(\lambda) H_0^{(2)}(kr) d\lambda \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu(\lambda) \frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial n} d\lambda \quad [H_0^{(2)} = \text{Hankelsche Funktion}]$$

gesucht, was zu den obengenannten Integralgleichungen führt. In der zweiten Abhandlung werden Existenz- und Eindeigkeitsätze bewiesen. Die Untersuchung der Lösungen kann nach dieser Methode leicht ausgeführt werden. Janczewski.

Müntz, Ch. H.: Zum dynamischen Wärmeleitungsproblem. Math. Z. 33, 323—337 (1934).

Es handelt sich um die Auffindung der Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$ bei vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen im ein- oder zweidimensionalen Falle; im letzteren für einen Zylinderbereich mit den zur t -Achse parallelen Erzeugenden und mit stetig gekrümmter Leitlinie; der dreidimensionale Fall wird auch kurz behandelt. Die Lösung wird mittels der Wärmepotentiale einer Doppelbelegung (bei gegebener Randtemperatur) bzw. einer einfachen Belegung (bei gegebenem normalem Wärmefluss) dargestellt; zur Auffindung der unbekannten Belegungsdichten wird man auf eine Integralgleichung zweiter Art geführt, die Volterrasch in bezug auf t und Fredholmisch in bezug auf die Bogenlänge des Randes ist; diese Gleichung läßt sich, trotz der Singularität des Kernes, durch sukzessive Approximationen lösen.

Es scheint dem Verf. die Arbeit von E. E. Levi „Sull'equazione di calore“ [Ann. di Mat., III. s. 4 1903] unbekannt geblieben zu sein, wo diese Aufgabe zum erstenmal und mittels derselben Methode gelöst worden ist, und zwar für die allgemeineren Bereiche, wobei nämlich nur stetige Krümmung der Grenzfläche und die Abwesenheit der zur t -Achse parallelen Normalen vorausgesetzt wird. W. Stepanoff (Moskau).

Auerbach, Herman: Sur l'intégrale de Poisson. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr 9, 290—293 (1933).

The author obtains the analogue for space of a result due to Anghelutza, Bull. Sci. math., II, 59, 138—140 (1924), for the plane. Let $f(Q)$ be continuous (but non-constant) on the unit sphere S about the point A as center. Let $F(P)$ be the value at the interior point P of Poisson's integral corresponding to f . Let

$$\omega(h) = \max |f(Q_1) - f(Q_2)|, \quad \angle Q_1 A Q_2 \leq h,$$

be the modulus of continuity of f on S . The author shows that, as P tends to Q on the radius AQ ,

$$F(P) - f(Q) = O\left\{\omega\left(\log \frac{1}{r}\right) \cdot \log \frac{1}{\omega(\log 1/r)}\right\}, \quad r = AP.$$

Here O is independent of Q .

Gergen (Rochester).

Russyan, C.: Intégration du système de m équations aux différentielles totales par les $m+1$ intégrales $u_i = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, m+1$). Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 7, 45—68 (1933).

Es sei $(S) \omega_1 = \dots = \omega_m = 0$ ein System von m unabhängigen Pfaffschen Gleichungen in p ($\geq m+2$) Veränderlichen x_1, \dots, x_p . Ist $u_i(x_1, \dots, x_p) = c_i$ ($i = 1, \dots, q$), mit beliebigen Konstanten c_i , ein Integral von (S) , so ist $q \geq m$, und das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn (S) vollständig integrierbar ist. Der Verf. betrachtet Systeme (S) für deren größte Integrale von obiger Form $q = m+1$ ist. Ein System (S) hat diese Eigenschaft dann und nur dann, wenn 1. die Klasse der Differentialform $\Omega = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m$, wo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ neue Veränderliche bedeuten, gleich $2(m+1)$ ist; 2. wenigstens in einer kanonischen Form $U_1 du_1 + \dots + U_{m+1} du_{m+1}$ von Ω , die u_i von den λ nicht abhängen. Diese Bedingungen werden durch einfache Aussagen über bestimmte, aus den Koeffizienten der Gleichungen von (S) und denen ihrer bilinearen Kovarianten gebildete rationale Funktionen und lineare homogene part. Differentialgleichungen 1. Ordnung, ausgedrückt.

O. Borůvka (Brno).

Pfeiffer, G.: Sur les invariants intégraux d'ordre $(n-1)$. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 8, 1103—1112 (1933) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß das Aufsuchen der kontravarianten Funktionen erster Ordnung und der Integralinvarianten $(n-1)$ -ter Ordnung des Systems

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt \quad (1)$$

(ξ_i unabhängig von t !) zur Lösung der Gleichung $XZ(f) - ZX(f) = 0$ (2)

$$\left[X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

führt. Die Gleichung (2) spielt aber eine wichtige Rolle in der Theorie der Operatoren der Differentialgleichung $X(f) = 0$, welche in den früheren Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. 1, 209; 2, 265; 3, 397; 4, 9) veröffentlicht ist. Die neue Aufgabe, d. h. die Konstruktion der obengenannten Invarianten wird also jetzt mit Hilfe der früher entwickelten Methoden gelöst.

Janczewski (Leningrad).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Delsarte, J.: Application de la théorie des fonctions moyenne-périodiques à la résolution de certaines équations intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 535—537 (1934).

Continuation from C. R. Acad. Sci., Paris 198, 330—332 (this Zbl. 8, 253). Here the main problem is the study of functional equations of the form

$$(1) \quad \delta_x[f(\xi)] \equiv \int_0^a K(\xi) f(x + \xi) d\xi = \varphi(x);$$

Fredholm-Nörlund equations in the author's terminology. Extensions to higher dimensions are indicated. — It is assumed that $A(0) \neq 0$ where $A(\lambda) = \delta_0[e^{\lambda \xi}]$.

The author introduces Bernoullian numbers, polynomials and functions as follows. $B_n(x)$ is a polynomial of degree n such that

$$B'_n(x) = B_{n-1}(x), \quad \delta_0[B_0(\xi)] = 1, \quad \delta_0[B_n(\xi)] = 0, \quad (n \geq 1)$$

$$e^{\lambda x}/A(\lambda) = \sum_0^\infty B_n(x) \lambda^n, \quad \delta_x[B_n(\xi)] = x^n/n!.$$

We have $B_n = B_n(0)$, and if $\{\lambda_p\}$ are the zeros of $A(\lambda)$,

$$B_n(x) = - \sum_{p=1}^\infty \frac{e^{\lambda_p x}}{(\lambda_p)^{n+1} A'(\lambda_p)}, \quad 0 \leq x \leq a, n > 0.$$

$\bar{B}_n(x)$ is the mean-periodic continuation of $B_n(x)$. The author indicates a generalization of the Euler-Maclaurin summation formula:

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^n B_p(x) \delta_y[f^{(p)}(\xi)] - \delta_y \left[\int_0^{\xi-x-y} B_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta) d\eta \right],$$

and a principal solution of (1), viz.

$$f(x) = \sum_{p=0}^n B_p \varphi^{(p)}(x) - \int_0^\infty \bar{B}_n(\xi) \varphi^{(n+1)}(x-\xi) d\xi,$$

valid if $\varphi(x)$ has the necessary derivatives and the integral is uniformly convergent in every finite interval. E. Hille (New Haven, Conn.).

Orlicz, W.: Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen. I. *Studia Math.* **4**, 33—37 (1933).

Orlicz, W.: Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen. II. *Studia Math.* **4**, 41—47 (1933).

Eine Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ heißt bekanntlich unbedingt konvergent, wenn sie bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiert. Diese Definition bleibt unverändert, auch wenn f_n zu irgendeinem linearen Raum gehören. Verf. beweist, daß die folgenden Bedingungen für die unbedingte Konvergenz im Raume L^p aller in p -ter Potenz integrierbaren Funktionen notwendig sind: Im Falle $1 \leq p \leq 2$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}$$

und im Falle $p \geq 2$ die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 |f_n(x)|^p dx.$$

A. Kolmogoroff (Moskau).

Mazur, S., und L. Sternbach: Über die Borelschen Typen von linearen Mengen. *Studia Math.* **4**, 48—53 (1933).

In unendlichviel-dimensionalen linearen, normierten und vollständigen Räumen (sog. Räumen vom Typus B) gibt es lineare Teilmengen F_σ , welche sich nicht als Summe abzählbar vieler linearer, abgeschlossener Mengen darstellen lassen. Dabei wird eine Menge E linear genannt, falls mit zwei Elementen x_1, x_2 auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ zu E gehört, unter λ_1, λ_2 reelle Zahlen verstanden. Ferner gibt es lineare Mengen, welche zwar Durchschnitt einer linearen F_σ -Menge und einer G_δ -Menge, dennoch kein F_σ sind. Endlich gilt: Jedes lineare G_δ ist bereits abgeschlossen. Schauder (Lwów).

Banach, S., et C. Kuratowski: Sur la structure des ensembles linéaires. *Studia Math.* **4**, 95—99 (1933).

Im Raume der stetigen Funktionen $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, wird eine lineare Menge konstruiert, die sich als komplementär-analytisch (\equiv Komplement einer analytischen Menge) erweist, dabei aber keine Borelsche Menge ist. Schauder (Lwów).

Mazur, S., und L. Sternbach: Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen. Studia Math. 4, 54—65 (1933).

Satz I. Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer im B -Raume definierter Operationen $\{F_n(x)\}$ — mit Werten aus einem ebensolchen Raume — als Vereinigung abzählbar vieler linearer und abgeschlossener Mengen darstellbar, so ist R bereits abgeschlossen. Satz II. Ist die Konvergenzmenge R der linearen Funktionele $\{F_n(x)\}$ nicht abgeschlossen, so gibt es $x_m \in R$ ($m = 1, 2, \dots$) $x_0 \notin R$, mit $x_m \rightarrow x_0$, $|F_n(x_m)| \leq N - (N \text{ konstans, } n, m = 1, 2, \dots)$. Daraus folgt Satz III: Ist — für lineare Funktionele — R eine F_σ -Menge, so ist R abgeschlossen. Diese Ergebnisse werden nun auf den Fall erweitert, wo es sich bereits um Folgen linearer Operationen $y = F_n(x)$ handelt, wobei die y -Werte einem Raume Y angehören, der gewissen Zusagebedingungen genügt. Schauder (Lwów).

Banach, S., und S. Mazur: Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen. Studia Math. 4, 90—94 (1933).

An den Satz III der vorstehend referierten Arbeit anschließend wird bewiesen: Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer, in einem B -Raume erklärter, Operationen (mit Werten aus einem ebensolchen Raume) eine $G_{\delta\sigma}$ Menge, so ist sie schon ein F_σ . Als Anwendung folgt: In jedem unendlich-dimensionalen B -Raume gibt es eine lineare $F_{\sigma\delta}$ Menge, die keine $G_{\delta\sigma}$ Menge ist. Schauder (Lwów).

Mazur, S.: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math. 4, 70—84 (1933).

Die weiter vorkommenden Begriffe der linearen Mannigfaltigkeit, Hyperebene usw., die Begriffe der Stützebene, Tangentialebene usw., bilden entsprechende Übertragungen aus dem euklidischen Raum. — In linearen und normierten Räumen gilt: Satz I. Enthält die lineare Mannigfaltigkeit R keinen inneren Punkt des konvexen Körpers K , so gibt es eine Hyperebene H so, daß $R \subset H$ und K auf einer Seite von H liegt. Als Folgerung ergibt sich, daß durch jeden Punkt einer konvexen Hyperfläche F wenigstens eine Stützebene geht (für separable, lineare und normierte Räume wurde dieser Satz von G. Ascoli bewiesen, vgl. dies. Zbl. 5, 77). Durch genauere Betrachtung der konvexen Funktionele wird weiter bewiesen: Satz II. In separablen B -Räumen E besitzt jede konvexe Hyperfläche F Tangentialebenen (\equiv einzige Stützebene durch den betreffenden Punkt) in einer in F dichten G_δ -Menge. Die Menge der Punkte von F , in denen die Tangentialebene nicht existiert, ist also von erster Kategorie. Aus dem Inhalte des § 2 zitieren wir folgende Sätze: Satz III. Eine konvexe, abgeschlossene Menge W ist schwach abgeschlossen. Separationssatz: Ist W eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, $y_0 \in E - W$, so gibt es einen konvexen beschränkten Körper K mit Mittelpunkt, so daß $W \subset K$, $y_0 \in E - K$. Anschließend gibt der Verf. Kriterien für die schwache Konvergenz von Elementenfolgen. Schauder (Lwów).

Mazur, S.: Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p). Studia Math. 4, 128 bis 133 (1933).

In euklidischen Räumen X gilt bekanntlich der Satz I. Ist $W \subset X$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, $x_0 \in X - W$, so gibt es eine Kugel K , so daß $W \subset K$, $x_0 \in X - K$. Der Verf. zeigt nun, daß dieser Satz I noch in einer Klasse von normierten und linearen Räumen bestehen bleibt, welche nämlich folgenden Bedingungen genügen: α) die Norm $\|x\|$ als Funktional im Raume X besitzt ein starkes Frechetsches Differential (für $x \neq 0$). β) In jeder beschränkter Punktfolge gibt es gegen einen Punkt schwach konvergierende Teilfolgen. — Aus Satz I folgt dann nach den Ergebnissen der vorstehend referierten Arbeit: Ist $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_0 \in X$, die Folge $\{x_n\}$ beschränkt und enthält jede Kugel mit unendlich vielen Punkten x_n auch x_0 , so ist die Folge x_n gegen x_0 schwachkonvergent. Da nun die Räume L^p der mit p -ter Potenz integrierbaren Funktionen, $p > 1$ die Bedingungen α), β) erfüllen, so gelten für sie die oben angeführten Sätze. Schauder (Lwów).

Banach, S., und S. Mazur: Zur Theorie der linearen Dimension. *Studia Math.* **4**, 100—112 (1933).

Die Verff. untersuchen den Raum (V) der in $\langle 01 \rangle$ erklärten Funktionen $x(t)$ von beschränkter Schwankung bei der üblichen Normierung $\|x\| = |x(0)| + V_0[x(t)]$. Dabei wird mit $V_0[x(t)]$ die totale Variation von $x(t)$ in $\langle 01 \rangle$ bezeichnet. (V) ist mit dem zum Raume (C) der stetigen Funktionen konjugierten Raume äquivalent und jede lineare separable Menge $R \subset (V)$ ist mit einer linearen Menge im Raume L der integrierbaren Funktionen äquivalent. Daraus folgt die Existenz zweier separablen B -Räume, die zwar von gleicher linearer Dimension, dabei aber nicht isomorph sind. Als weitere Anwendung bekommt man einige Sätze aus der Theorie der reellen Funktionen, z. B.: Ist für eine Funktionenfolge $\{x_n(t)\}$, die in $\langle 01 \rangle$ erklärt ist, $V_0[x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) + \dots + x_{n_k}(t)] \leq 1$ für endliche Folgen von Indices $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$, so gilt $\lim_{n \rightarrow 0} V_0[x_n(t)] = 0$. (Wegen der hier benutzten Terminologie siehe: Banach, St., *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Math. t. 1, Warszawa 1932; dies. Zbl. **5**, 209.)

Schauder (Lwów).

Funktionentheorie:

Vignaux, J. C.: Über den Cauchyschen Satz für Funktionen einer komplexen Variablen. *An. Acad. Nac. Ci. exact. Fis. y Nat.*, Buenos Aires **3**, 159—161 (1933) [Spanisch].

Botea, N. G.: Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* **35**, 53—56 (1933).

Die Sätze der in diesem Zbl. **6**, 353 referierten Note werden teilweise bewiesen. Karamata (Beograd).

Montel, Paul: Sur un théorème de M. Pompeiu. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* **35**, 179—181 (1933).

Verschärfungen und Umformungen des Rouchéschen Satzes, die der Verf. schon in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. **6**, 62) mitgeteilt hat. Fenchel (Kopenhagen).

Valiron, Georges: Méthodes de sommation et directions de Borel. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **2**, 355—380 (1933).

Verf. fragt sich, ob es möglich ist, eine solche Definition der Borelschen Richtungen vom Maximaltypus einer ganzen Funktion zu geben, daß, wenn $f(z) = \sum a_n z^n$ eine beliebige ganze Funktion ist, eine solche assoziierte Funktion $F(z) = \sum a_n \gamma_n z^n$ existiert, daß alle solche Borelsche Richtungen von $f(z)$ völlig bestimmt seien, wenn nur die Lage der singulären Punkte von $F(z)$ bekannt ist. Ref. hat früher bewiesen (mit Hilfe der Borelschen Summationsmethode) daß, wenn $f(z)$ vom Normaltypus der Ordnung 1 ist, die Kenntnis der Lage der singulären Punkte von $F(z)$ (mit $\gamma_n = n!$) hinreichend ist, um einige Juliasche Richtungen von $f(z)$ zu bestimmen, wenn nur einige (wenig einschränkende) Bedingungen über den Charakter der Singularitäten von $F(z)$ erfüllt sind (s. dies. Zbl. **3**, 262 und **6**, 212). Um dieses Ergebnis für beliebige ganze Funktionen zu verallgemeinern, schien es nützlich, die Borelsche Summationsmethode zu verallgemeinern durch die Einführung anderer summatorischer Funktionen von beliebiger Ordnung statt der Exponentialfunktion. Die Borelsche Methode kann aber sowohl als eine „Integralmethode“ als auch als eine „Methode durch Mittelwerte“ aufgefaßt sein; jede dieser Fassungen führt zu einer Verallgemeinerung der summatorischen Funktion, die aber nicht miteinander zusammenfallen. — Im Falle der endlichen Ordnung wären diese Verallgemeinerungen auch vom Ref. in einer (vor kurzem erschienenen) Abhandlung gegeben (*Mem. Accad. d'Italia* **4**, 339—401; vgl. dies. Zbl. **8**, 264); deshalb gibt Verf. nur eine kurze Übersicht seiner Ergebnisse für diesen Fall und verweist für Näheres auf die genannte Abhandlung des Ref. Verf. betrachtet dann gründlich den Fall unendlicher Ordnung und zeigt, daß auch jeder ganzen Funktion $f(z)$ unendlicher Ordnung zwei summatorische Funktionen entsprechen (eine „integrale“ und eine „durch Mittelwerte“), deren Größenordnung der Größen-

ordnung von $f(z)$ ziemlich gleich ist. — Diese Verallgemeinerungen der Borelschen Methode führen zu Sätzen, die Anweisungen über das Wachstum von $f(z)$ geben, wenn die Lage der singulären Punkte von einer passenden Assoziierten $F(z)$ bekannt ist. Im Falle der endlichen Ordnung erlauben diese Sätze die Bestimmung der Borelschen Richtungen von $f(z)$ nur mit Hilfe einiger supplementärer Bedingungen über den Charakter der Singularitäten von $F(z)$ (wie im zitierten Spezialfalle). Miss Cartwright hat bewiesen, daß diese supplementären Bedingungen in der Natur der Sache liegen. Verf. untersucht deshalb die Borelschen Richtungen nur im Falle unendlicher Ordnung und gibt mehrere wichtige Sätze, die (für diesen Fall) auf die Frage, mit der dieses Referat beginnt, eine bejahende Antwort geben. *Vlad. Bernstein* (Milano).

Bernstein, Vladimiro: *Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 12, 173—196 (1934).

L'auteur étend et complète les résultats d'un mémoire précédent (J. École polytechn. 1932; ce Zbl. 6, 212) concernant les directions de Julia des f . entières du type moyen de l'ordre un: il considère ici le cas général des f . holomorphes d'ordre fini dans un angle, il étudie les directions de Borel du type maximum au lieu des directions de Julia, il précise la position de ces directions en général. $M(r)$ étant le max. de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, $\alpha \leq \varphi = \arg z \leq \beta$, $\varrho(r)$ un ordre précisé ($\varrho(r) \rightarrow \varrho$, $0 < \varrho < \infty$, $\varrho'(r)r \log r \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} [\log M(r)/r^{\varrho(r)}] = 1$), on sait (Valiron) que

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}}, \quad \alpha < \varphi < \beta, \quad (1)$$

est sous-trigonométrique. Dans certains intervalles on peut avoir $h(\varphi) \equiv A \cos \varrho \varphi + B \sin \varrho \varphi$, A et B const.; si cela a lieu pour $\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta$, $\delta > 0$, l'a. dit que $\varphi = \varphi_0$ est une direction sinusoidale de $f(z)$; sinon $\varphi = \varphi_0$ est non-sinusoidale. Si $n(f(z); r)$ désigne le nombre des zéros de $f(z)$ pour $|z| < r$, $\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta$, la direction φ_0 est dite direct. de Borel du type max. si, pour chaque $\delta > 0$, le rapport $n(f(z) - a; r)/r^{\varrho(r)}$ ne tend pas vers 0, sauf au plus pour une valeur a except. unique. Le th. principal du mém. est alors le suivant: Une direction non-sinusoidale de $f(z)$ est en général une direction de Borel du type maximum de $f(z)$. Voici la signification de en général. On sait (Valiron, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 1913) qu'il existe une fonction $V(z)$ holomorphe dans le secteur $|\arg z| \leq \pi/\varrho$, telle que

$$\lim [V(re^{i\varphi})/r^{\varrho(r)}] = e^{i\varphi\varrho}.$$

B. considère l'ensemble des fonctions

$$f(z) - g(z)e^{[h(\varphi_0) + i\varrho]V(ze^{-i\varphi_0})} \quad (2)$$

où q est une const. arbitraire, $g(z)$ une fonction d'ordre précisé inf. à $\varrho(r)$ dans un secteur S fixe mais arb. petit contenant la direct. φ_0 . Le th. est vrai pour toutes les f . (2) sauf au plus pour celles appart. à un voisinage convenablement défini (par l'écart des valeurs de $g(z)$ et $g_1(z)$) d'une fonction $g_1(z)$. Lorsque le secteur S est remplacé par un secteur d'ouverture sup. à π/ϱ , il n'y a plus dans l'ensemble (2) qu'une seule fonct. except. — Un autre th. concerne les zéros des f . $f(z) - g(z)$ où $g(z)$ est d'ordre précisé inf. à $\varrho(r)$ dans le voisinage d'une direct. φ_0 pour laquelle (1) est nul, mais n'est pas nul dans le voisinage. Il contient une prop. de Cartwright et Valiron et doit être rapproché de rés. de A. Rauch (J. Math. pures appl. 1933; ce Zbl. 8, 214); la considération de l'oscillation de $f(z)$ dans un cercle de remplissage d'ordre $\varrho(r)$ mettrait d'ailleurs en évidence le lien entre ce th. et le précédent.

G. Valiron (Paris).

Beurling, Arne: *Études sur un problème de majoration.* Uppsala: Diss. 1933. 109 S.

Die Methode der harmonischen Majorante wurde gleichzeitig von Carleman, Ostrowski und den Brüdern Nevanlinna in die Funktionentheorie eingeführt. Der große Erfolg motiviert die jetzt vorliegende systematische Untersuchung der Möglichkeiten der genannten Methode. Der Verf. geht ganz richtig davon aus, daß die An-

wendbarkeit der Methode daran gebunden ist, daß man das harmonische Maß in Verbindung mit dem gewöhnlichen Längen- und Flächenmaß stellen kann. Der zentrale Teil der Abhandlung befaßt sich eben mit Abschätzungen, welche dieses leisten, und es muß unbedingt anerkannt werden, daß es dem Verf. gelungen ist, in dieser Beziehung einige wirklich neue Sätze zu beweisen, welche sicher noch eine bedeutende Rolle spielen werden. Um einen besonderen Satz hervorzuheben, sei das folgende Resultat angeführt: Das im Punkte z_0 bestimmte harmonische Maß ω derjenigen Randbogen eines Gebiets D , welche außerhalb des Kreises $|z - z_0| \leq \rho$ fallen, erfüllt die Un-

gleichung $\omega \leq e^{-\frac{\rho^2}{R^2} + 1}$, wo πR^2 die Fläche des Gebiets D bezeichnet. Der Satz scheint tief zu liegen und enthält als Konsequenz z. B. einen neuen Beweis der Denjoy'schen Vermutung. Der Beweis ist dementsprechend ziemlich kompliziert. Er gelingt unter geschickter und neuartiger Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung. — Es ist unmöglich, in einem Referat der Fülle der neuen Ideen gerecht zu werden, welche diese Arbeit auf den verschiedensten Gebieten gibt. Die Anwendungen beziehen sich auf lineare Funktionale, ganze Funktionen, Regularitätsbedingungen des Dirichlet'schen Problems und schließlich auf quasi-analytische Funktionen, und auf allen Gebieten werden bemerkenswerte Resultate erzielt. *Ahlfors* (Helsingfors).

Wirtinger, W.: Note zur Theorie der schlichten Funktionen. *Studia Math.* 4, 66 bis 69 (1933).

Das Äußere des Einheitskreises $|z| > 1$ werde durch eine auf die Gestalt $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{z^{\nu}}$ normierte Funktion schlicht auf das Äußere eines konvexen Polygons (allgemeiner: auf das Komplement einer konvexen Menge) abgebildet. In Verschärfung der früher bekannten Abschätzung $|\operatorname{Arg} f'(z)| \leq 2 \arcsin \frac{1}{|z|}$ wird u. a. die Ungleichung $|\operatorname{Arg} f'(z)| \leq \frac{\pi}{|z|^2}$ bewiesen. *Birnbaum* (Lwów).

Grötzsch, Herbert: Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. II. Mitt. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 31/32, 893—908 (1934).

Sei \mathfrak{B} ein schlichter Bereich der z -Ebene und z_1, z_2, z_3 drei endliche innere Punkte desselben. Es seien ferner drei reelle nichtnegative Zahlen a, b, c gegeben, die nicht zugleich verschwinden sollen. Gefragt wird nach dem Maximum bzw. Minimum der Größe $P(a, b, c) = |f'(z_1)|^a \cdot |f'(z_2)|^b \cdot |f'(z_3)|^c$, wenn $w = f(z)$ sämtliche schlichten Abbildungen von \mathfrak{B} durchläuft, die z_1, z_2, z_3 zu Fixpunkten haben. Die Extremalabbildungen werden sämtlich aufgestellt und geben bisher nicht betrachtete interessante Beispieltypen. Hervorzuheben ist, daß unter Umständen ein ganzes Kontinuum von Extremalabbildungen auftritt. In der Beweisführung verwendet der Verf. verschiedene Erweiterungen der von ihm ausgebildeten Flächenstreifenmethode (vgl. dies. Zbl. 7, 312). *K. Löwner* (Prag).

Behnke, H., und P. Thullen: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Über die Verallgemeinerung des Weierstrass'schen Produktsatzes. *Math. Ann.* 109, 313—323 (1934).

1. Nach einem allgemeinen Prinzip werden Beispiele konstruiert, die zeigen, daß ein bekannter Satz von Cousin über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen-Mannigfaltigkeiten und -Vielfachheiten nicht für beliebige Bereiche gilt. 2. Hat man abzählbar viele Funktionen φ_i , die in einem Bereiche \mathfrak{B} regulär sind, so kann man unter sehr allgemeiner Voraussetzung mit Hilfe von bekannten, aus der Funktionentheorie einer Variablen stammenden Verfahren in \mathfrak{B} meromorphe (evtl. reguläre) Funktionen konstruieren, die genau die Mannigfaltigkeiten $\varphi_i = 0$ als Nullstellenmannigfaltigkeiten in \mathfrak{B} haben. *Kähler* (Hamburg).

Viola, T.: Sur le théorème d'identité pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 705—707 (1934).

Verf. betrachtet im R_{2n} Punktmengen \mathfrak{C} mit einem einzigen Häufungspunkt P_0

und der Eigenschaft, daß jede in der Umgebung von P_0 reguläre, auf \mathfrak{C} verschwindende Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ identisch verschwindet. Er geht dabei von dem Satze aus, daß eine Punktmenge \mathfrak{C} dann und nur dann diese Eigenschaft nicht besitzt, falls die Punkte von \mathfrak{C} auf ein in der Umgebung von P_0 sich algebraisch verhaltendes System analytischer Flächen verteilbar sind [vgl. auch B. Levi, Boll. Un. Mat. Ital. **13**, 1—5 (1934) und dies. Zbl. **8**, 265].

Thullen (Rom).

Geometrie.

Thébault, V.: Sur l'isopôle d'une droite par rapport à un triangle. Gaz. mat. **39**, 248—250 (1934).

Cesàro, G.: Sur les points d'égalité d'inertie du triangle. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 87—102 (1934).

Padoa, Alessandro: Una proposizione di Erone ridimostrata e completata. Period. Mat., IV. s. **14**, 114—118 (1934).

Abason, Ernest: Sur le trapèze parabolique de M. D. Pompeiu. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **35**, 5—10 (1933).

Cosnitz, C.: Ein Satz, der zum Desargues-Sturmschen Satz reziprok ist, und einige Anwendungen davon. Bol. mat. **6**, 105—108 (1933) [Spanisch].

Comerio, Rina: Sopra una proprietà di una circonferenza tangente a due coniche omofocali. Period. Mat., IV. s. **14**, 112—113 (1934).

Ciamberlini, Corrado: Su un gruppo particolare di conoidi rispetto ad un cerchio. Period. Mat., IV. s. **14**, 120—121 (1934).

Vaidyanathaswamy, R.: On the θ -normals of a conic. Math. Student **1**, 121—130 (1933).

Peek, B. M.: Pansymmetrical pencils. Math. Gaz. **18**, 19—22 (1934).

Konstruktion und Herleitung einiger Eigenschaften von Büscheln von abzählbar vielen Durchmessern einer gleichseitigen Hyperbel, die die folgende Symmetrieeigenschaft besitzen: Die Tangente in einem Endpunkt eines beliebigen Durchmessers des Büschels wird von den übrigen Durchmessern des Büschels in einem in bezug auf den Berührungspunkt symmetrischen Punktsystem geschnitten. *W. Fenchel*.

Wertheimer, Albert: A note on a certain property of a family of curves. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 79—80 (1934).

Es seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 in der Ebene gegeben. P sei ein willkürlicher Punkt von g_2 . Man lege durch P eine Vertikale bis zum Schnitt P_3 mit g_3 , durch P_3 eine Horizontale bis zum Schnitt P_1 mit g_1 , durch P_1 eine Vertikale bis zum Schnitt P_2 mit g_2 , durch P_2 eine Horizontale bis zum Schnitt P'_3 mit g_3 , durch P'_3 eine Vertikale bis zum Schnitt P'_1 mit g_1 und schließlich durch P'_1 eine Horizontale bis zum Schnitt P' mit g_2 . Dann gilt: Dann und nur dann fallen P und P' für alle P von g_2 zusammen, wenn die drei Geraden durch einen Punkt gehen. Verf. beweist den hieraus durch topologische Abbildungen der speziellen Gestalt $\xi = f(x)$, $\eta = g(y)$ entstehenden Satz über die Bildkurven der Geraden. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Fox, E.: Die Anwendung der Affinität zur Herstellung von Raumbildern und der Affinzeichner. Z. Instrumentenkde **54**, 76—87 (1934).

In der Praxis haben sich Raumbilder in axonometrischer Darstellung kaum eingebürgert, es wird daher vorgeschlagen, auf Grund der Affinität Raumbilder zu entwerfen. Die Konstruktion der Bilder ist sehr einfach, so daß leicht eine neue Affinitätsachse oder eine neue Projektionsrichtung gewählt werden kann, wenn das erste Bild nicht ganz befriedigend war. Die Konstruktion ist auch mechanisch leicht auszuführen, wozu der „Affinzeichner“ entworfen wurde. Der Affinograph von Mailloux-Coradi ist nicht erwähnt und scheint dem Verf. leider nicht bekannt gewesen zu sein.

G. Koehler (Erfurt).

Segre, Beniamino: Gli scorrimenti nella geometria non euclidea degli iperspazi ed alcune notevoli corrispondenze proiettive. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 12, 327—347 (1934).

Diese Abhandlung ist aus einer Vorlesung des Verf. an der Universität Bologna entstanden. Die erste Frage, die hier behandelt wird, ist die Bestimmung aller nicht singulären Homographien eines Raumes S_n , die eine allgemeine Hyperfläche 2. Ordnung Q in sich überführen, so daß die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare von Q auf Q selbst liegen; solche Homographien sind alle „biassial“ (sie besitzen nämlich zwei fundamentale Räume S_h, S_{n-h-1}) und können sowohl allgemein als auch speziell sein. Ist Q imaginär, und wird sie als Grundfläche einer elliptischen Maßbestimmung angenommen, so geben die gefundenen Homographien (falls n ungerade ist) eine Art elliptischer Bewegungen, die für $n = 3$ mit den Cliffordschen Schiebungen eines elliptischen S_3 übereinstimmen; man erhält so die hyperräumliche Ausdehnung der Cliffordschen Parallelen. Eine zweite Anwendung ist die Bestimmung aller Reziprozitäten des Raumes S_n , die eine einzige Inzidenzfläche 2. Ordnung besitzen, ohne Polaritäten zu sein. Als letzte Anwendung werden die Homographien bestimmt, die eine Hyperfläche 2. Ordnung Q in eine andere Q' überführen, so daß die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare P, P' von Q, Q' die Flächen Q, Q' selbst in P, P' bzw. berühren; wenn $n = 3$, bilden die Geraden PP' eine bekannte Art von W -Kongruenzen.

E. G. Togliatti (Genova).

Algebraische Geometrie:

Severi, Francesco: La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche. *Mem. Accad. Ital.* 5, 239—283 (1934).

La première Partie de ce Mémoire commence par démontrer que les variétés M_k^r d'un espace linéaire S_r ($1 \leq k \leq r-1$) forment un seul système d'équivalence (connexe), et que chacune d'elle peut toujours—avec variation continue—être réduite à une variété dégénérée dans $n S_k$ distincts; donc—sur S_r —un S_k constitue la base pour la totalité des variétés de dimension k . La question générale de la base pour les M_k (de dimension k assignée) appartenant à une variété W_r donnée, est après cela résolue au moyen de considérations topologiques, en prenant comme critérium d'équivalence de deux M_k , leur équivalence arithmétique. Deux variétés algébriques de W_r (ayant même dimension k), M_k et M'_k , sont dites arithmétiquement équivalentes, et l'on écrit $M_k \equiv M'_k$, si—quelle que soit la variété algébrique M_{r-k} de W_r —on a: $[M_k M_{r-k}] = [M'_k M_{r-k}]$. Si, dans la riemannienne à $2r$ dimensions de W_r , il est $M_k \sim M'_k$, il résulte aussi $M_k \equiv M'_k$; de même l'équivalence algébrique de deux variétés algébriques (c'est-à-dire la possibilité de les réduire l'une à l'autre avec continuité, sans sortir de W_r), entraîne leur équivalence arithmétique. Les propositions réciproques de celles-ci, sont vraies sur les surfaces ($r = 2, k = 1$); elles sont ici démontrées dans le cas général, en s'appuyant sur un postulat dont la validité semble probable. — Deux bases (A_1, \dots, A_ρ) , (B_1, \dots, B_ρ) pour les variétés de dimensions complémentaires k et $r-k$, ont le même nombre ρ d'éléments; il leur est attaché le déterminant $\Delta = |[A_i B_j]|$ différent de zéro, qui est nommé leur discriminant simultané. Ces considérations permettent d'introduire les bases intermédiaires et minimas, tout comme dans le cas classiques des surfaces. — Une première application de cette théorie, consiste dans la résolution générale du problème des caractéristiques de la géométrie numérique. — Une deuxième importante application est faite dans la dernière Partie du Mémoire, dédiée à la théorie des correspondances algébriques entre surfaces. Il n'est pas possible de resumer brièvement tous les résultats: c'est pourquoi nous nous bornons aux traits essentiels. L'A. — suivant une idée bien connue de C. Segre — considère les correspondances ∞^2 et ∞^3 entre les points de deux surfaces F, F' assignées, respectivement comme des surfaces et comme des variétés à trois dimensions (complexes)

appartenant au produit (topologique) W_4 de F, F' . Il classifie les correspondances dégénérées, et étudie particulièrement les correspondances ∞^2 à valence zéro, en donnant pour leur rang une simple signification nouvelle; il assigne les bases pour chacune des totalités ∞^2 et ∞^3 susdites de W_4 ; enfin — dans le cas où F, F' coïncident — il déduit d'ici le principe général de correspondance sur une surface, avec son interprétation fonctionnelle. *Beniamino Segre* (Bologna).

Souris, Robert: Sur une surface du huitième ordre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 151—155 (1934).

Carroll-Rusk, Evelyn: Cremona involutions defined by a pencil of cubic surfaces Amer. J. Math. 56, 96—108 (1934).

Besondere Fälle einer räumlichen Cremonaschen Transformation, die von Black und Carroll selbst schon betrachtet worden ist (s. dies. Zbl. 5, 371); hier besteht das Flächenbüschel aus Flächen 3. Ordnung durch eine Gerade r , und die Flächen des Büschels werden eindeutig auf die Punkte von r bezogen. Zahlreiche Unterfälle, wo die Basiscurve C^8 des Büschels zerfällt. *E. G. Togliatti* (Genova).

Hutcherson, W. R.: A cyclic involution of order seven. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 143—151 (1934).

Verf. betrachtet die Fläche:

$$F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv a x_2^2 x_3 + b x_3^2 x_1 + c x_1 x_2 x_4 = 0,$$

welche invariant ist für die zyklische Kollineation T :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4 \quad (\varepsilon^7 = 1).$$

T bestimmt eine zyklische Involution I_7 auf F_3 . I_7 besitzt vier Koinzidenzpunkte, deren zwei nämlich P_2 (0, 1, 0, 0) und P_3 (0, 0, 1, 0) einfache Punkte von F_3 sind; durch jeden dieser Punkte gibt es zwei sich selbst entsprechende Richtungen. Verf. bestimmt die Art dieser Koinzidenzpunkte genauer und beweist den folgenden Satz: Die invarianten Kurven, die aus F_3 geschnitten werden von den Flächen, deren Ordnung weniger als sieben ist, gehen alle in die invarianten Richtungen durch diese Koinzidenzpunkte. Die Zahl der Zweige durch jeden Punkt ist weniger als sieben. *G. Schaake*.

Differentialgeometrie:

Servais, Cl.: Sur les surfaces gauches. Mathesis 47, 225—227 (1933).

Servais, Cl.: Sur les surfaces gauches. Mathesis 48, 5—10 (1934).

Mit g, M, X sollen folgende Begriffe bezeichnet werden: eine Flächengerade auf einer geradlinigen Fläche, der laufende Punkt von g , der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes der Fläche mit der zu g in M senkrechten Ebene. Bewegt sich M auf g , so beschreibt X eine kubische Kurve, welche auch in eine Gerade degenerieren kann. Wenn insbesondere alle Flächengeraden gleichzeitig Binormalen einer Kurve mit konstanter Windung sind, so trifft die obenerwähnte Degeneration bei jeder Flächengeraden g zu und umgekehrt. Der Punkt H , der von M durch die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte (der zu M gehörigen Normalschnitte) harmonisch getrennt wird, beschreibt auch eine kubische Kurve, welche in dem obenerwähnten Falle zu einer Geraden degeneriert. Andere Sätze betreffs der oskulierenden Quadriken (insbesondere auch über Rotationsquadriken) werden abgeleitet. Als Beispiel diene der folgende Satz: Wenn der Drall konstant ist, so ist der Zentralpunkt von g gleichzeitig der Scheitel der die Gerade g oskulierenden Quadrik. — Die Sätze werden synthetisch abgeleitet, und zwar auf Grund der bekannten Sätze der klassischen Differentialgeometrie. *Hlavatý* (Praha).

Vakselj, Anton: Beiträge zur Flächentheorie. Math. Z. 38, 443—464 (1934).

Zwischen der Normalkrümmung r und der geodätischen Torsion t einer durch einen Flächenpunkt P gehenden Flächenkurve, sowie der mittleren Krümmung H und der Gaußschen Krümmung K der Fläche F in P läßt sich leicht die Beziehung herleiten

$$r^2 + t^2 - 2Hr + K = 0. \quad (1)$$

Verf. leitet zunächst (1) durch längere Rechnung ab. Er deutet hierauf (1) als Gleichung eines Kreises $k(P)$ einer euklidischen r, t -Ebene. Die Beziehung zwischen den Flächenrichtungen durch P und den Punkten von $k(P)$ ist derart, daß der Winkel zweier Richtungen durch P gleich dem Peripheriewinkel über dem zugehörigen Bogen von $k(P)$ ist, so daß also einem Umlauf um k ein halber Umlauf um P entspricht. Verf. studiert allgemeine Richtungsinvolutionen durch P , die ja in Involutionen auf $k(P)$ abgebildet werden. Die Involution konjugierter Richtungen entspricht dem Spezialfall, daß auf k die Schnittpunkte mit der t -Achse festbleiben. Auch im allgemeineren Fall, daß die Verbindungslinie der Fixpunkte von k eine beliebige Parallele der t -Achse ist, erhält man für die entsprechende Involution in P eine Deutung durch Charakteristiken bewegter Kugeln (die im zuerst erwähnten Fall in die Tangentialebenen ausarten). Betrachtet man die Änderung von $k(P)$ mit P als lineare Substitution in der komplexen $(r + it)$ -Ebene, so spielen eine besondere Rolle die Niveau-linien der Hauptkrümmungen von F (falls nicht F konstante Gaußsche Krümmung hat). — Es wird ferner eine neue Gestalt der Laguerreschen Relation (zwischen r, t und der geodätischen Krümmung) angegeben, und nach zahlreichen Substitutionen ergeben sich zwei komplizierte partielle Differentialgleichungen 3. Ordnung für H , wobei als Koeffizienten nur die des Fundamentaltensors und dessen Ableitungen bis zur 5. Ordnung auftreten. Verf. betrachtet diese Abhängigkeit der mittleren Krümmung vom Fundamentaltensor als Analogon zum theorema egregium. Er wendet seine Formeln auf das bekannte „Cauchy-Problem der Biegungstheorie“ an. Nach Ansicht des Referenten ergibt sich dadurch keine Erweiterung der bisher bekannten Existenzsätze über dieses Problem.

Cohn-Vossen (Zürich).

Sauer, Robert: Krümmungsfeste Kurven bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. Math. Z. 38, 468—475 (1934).

Es wird gezeigt: 1. Die Krümmung der Asymptotenlinien bleibt bei Infinitesimalverbiegung in erster Ordnung ungeändert (das ist nur in dem Fall trivial, daß diese Kurven bei der Infinitesimalverbiegung Asymptotenlinien bleiben). 2. Von einem gleich zu erwähnenden Ausnahmefall abgesehen, gibt es außer den Asymptotenlinien eine zweifache Kurvenschar, die bei der Infinitesimalverbiegung ihre Krümmung in erster Ordnung nicht ändert. Ist die Gaußsche Krümmung der Fläche positiv, so ist die Schar dieser „krümmungsfesten“ Kurven reell. 3. Von einzelnen singulären Punkten abgesehen, tritt eine Ausnahme von 2. genau dann ein, wenn eine Regelfläche eine solche Infinitesimalverbiegung erfährt, bei der sie Regelfläche bleibt. (Auf S. 469, Zeile 7 von unten muß es Φ statt Φ' heißen!) 4. Damit eine vorgegebene zweifache Kurvenschar einer Fläche F , etwa das Parameternetz, bei einer passenden Infinitesimalverbiegung von F krümmungsfest sei, muß es zum Ortsvektor $\mathfrak{r}(u, v)$ von F einen Vektor $\mathfrak{h}(u, v)$ und eine nicht identisch verschwindende Funktion $a(u, v)$ geben, so daß das Gleichungssystem $\mathfrak{h}_u = a\mathfrak{r}_u$, $\mathfrak{h}_v = -a\mathfrak{r}_v$ besteht; dann ist \mathfrak{h} der Ortsvektor des Drehnisses einer Infinitesimalverbiegung von F . (Zur geometrischen Theorie solcher „antiparallelen“ Kurvennetze vgl. die Arbeit des Ref. „Zwei Sätze über Starrheit der Eiflächen“, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1927). 5. Die Eigenschaft eines Kurvennetzes, bei passender Infinitesimalverbiegung der Fläche krümmungsfest zu sein, ist (wie aus der Definition keineswegs zu erwarten) projektiv. — Ähnliche Probleme und Sätze wurden vom Verf. in der in diesem Zbl. 7, 227 referierten Arbeit behandelt.

Cohn-Vossen.

Stessmann, Berthold: Periodische Minimalflächen. Math. Z. 38, 417—442 (1934).

Eine durch ein geradliniges Polygon begrenzte Minimalfläche heißt periodisch, wenn die Anzahl ihrer durch Spiegelung erhaltenen Stücke in einem endlichen Raum endlich ist. Nach Schoenflies gibt es insgesamt sechs verschiedene von einem Vierseit begrenzte periodische Minimalflächen. In der vorliegenden Arbeit wird u. a. gezeigt, daß die Koordinaten der genannten Minimalflächen Realteile Abelscher Integrale sind, welche durch algebraische Substitutionen in elliptische Integrale transformiert werden können.

Myrberg (Helsinki).

Mühlendyck, O.: Über eine Transformation orientierter Strahlen. S.-B. Berlin. math. Ges. 33, 7—14 (1934).

Es wird eine Transformation orientierter Strahlen untersucht, bei der eine metrisch spezielle Kongruenz orientierter Strahlen fest bleibt. Die beiden möglichen Orientierungen eines (nicht isotropen) Raumstrahls werden durch die Bezeichnung „rechtsseitig“ und „linksseitig“ unterschieden. Die einfachsten linearen Mannigfaltigkeiten orientierter Strahlen werden (im Gebiet regulären Verhaltens) durch die Transformation wie folgt geändert: Jedem Parallelenbüschel entspricht ein rechtsseitiges isotropes Büschel (d. i. ein Büschel in einer Minimalebene); jedes rechtsseitige isotrope Parallelenbüschel geht in ein ebensolches über; aus jedem Parallelenbündel wird ein (in einer Minimalebene liegendes) rechtsseitiges isotropes Feld; jedem rechtsseitigen isotropen planaren Komplex (mit einer unendlichfernen isotropen Leitgeraden) entspricht stets ein Komplex von derselben Art. Schließlich wird gezeigt, daß jede (allgemeine) zylindrische Kongruenz orientierter Strahlen in eine Kongruenz übergeht, bei der das Quadrat der mittleren Steigung (d. i. der Drall der in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen) überall gleich dem Steigungsmaß ist, und bei geeigneter Wahl der Orientierung der Kongruenzstrahlen gilt dies auch umgekehrt. *J. L. Krames (Graz).*

Takasu, Tsurusaburo: Zur Grundlage der Lieschen Differentialkugelgeometrie. I. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 357—360 (1933).

Takasu, Tsurusaburo: Zur Grundlage der Lieschen Differentialkugelgeometrie. II. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 361—363 (1933).

I. Ausbau einer Differentialgeometrie der einparametrischen Scharen orientierter Kugeln im Raume der Lieschen höheren Kugelgeometrie (Ableitungsgleichungen, Invarianten). — II. Nachweis des Zusammenhanges dieser Theorie mit früheren Untersuchungen des Verf. (Theorie der Kugelscharen im konformen und dualkonformen Raum sowie im Laguerreschen und dual-Laguerreschen Raum.) *Schatz.*

Urban, Helmut: Zur affinen Differentialgeometrie zweier komplexer Veränderlicher: Flächen im vierdimensionalen Raume. Math. Z. 38, 338—374 (1934).

Ce mémoire est dédié à l'étude des propriétés différentielles des surfaces (non caractéristiques) de l'espace S_4 de deux variables complexes x et y , qui se conservent par rapport aux transformations du groupe affine (à coefficients complexes):

$$x \rightarrow ax + by + f, \quad y \rightarrow cx + dy + g, \quad (ad - bc \neq 0);$$

il fait usage de notations vectorielles opportunes et du calcul tensoriel. Ainsi, p. ex., le produit $\xi_1 \xi_2 = -\xi_2 \xi_1$ de deux vecteurs $\xi_1 = (x_1, y_1)$, $\xi_2 = (x_2, y_2)$ est donné par le nombre complexe $x_1 y_2 - x_2 y_1$; son module est pris — par convention — comme aire du parallélogramme déterminé par les deux vecteurs ξ_1 , ξ_2 (il s'annule si ces vecteurs sont parallèles à un même plan caractéristique, et dans ce cas seulement). De cette définition découlent celles de l'élément d'aire d'une surface de S_4 et des surfaces minima. — Le travail est divisé en trois chapitres. Le chap. I introduit les vecteurs tangents et normals à une surface, d'où s'ensuit le transport des vecteurs tangents par parallélisme de Levi-Civita (jouissant de la propriété de laisser inaltérée l'aire déterminée par deux vecteurs tangents dans le même point); il donne en outre les relations entre les vecteurs dérivés 1^{er} et 2^{es} du point mobile sur la surface, avec leurs conditions d'intégrabilité. Le chap. II classe les surfaces de S_4 en cinq classes, moyennant la considération de deux formes différentielles invariantes, linéaire l'une, cubique l'autre; de plus il assigne, pour chaque classe, les termes jusqu'au troisième degré des développements en série canoniques de x , y , et certaines dérivées invariantes du vecteur $\xi = (x, y)$, avec les formules de permutation relatives. Dans le chap. III il y a une simple condition analytique, nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit minima, et la solution du problème analogue à celui de Plateau; suivent des propriétés remarquables, relatives aux surfaces ayant parallélisme intégrable, aux surfaces

de translation qui en même temps sont des surfaces minima, et aux surfaces réglées.

Beniamino Segre (Bologna).

Palozzi, G.: Sulla geometria proiettivo-differenziale dei reticolati piani. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 537—542 (1933).

Ein nicht geradliniges ebenes Kurvennetz ist bis auf Kollineationen eindeutig bestimmt, wenn außer dem projektiven linearen Elemente (im Sinne des Ref.; siehe G. Fubini und E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Kap. 10) eine gewisse lineare Differentialform F_1 gegeben ist. F_1 ist ein exaktes Differential genau im Falle eines asymptotischen Netzes. Wenn die Projektivnormalen einer Fläche S durch einen festen Punkt P hindurchgehen, so erhält man durch Projektion der asymptotischen Linien von S vom Zentrum P aus das allgemeinste Netz, für das F_1 identisch Null ist.

Čech (Brno).

Pastori, Maria: Derivazione rispetto a un punto e coefficiente di dilatazione lineare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 552—558 (1933).

In einem Riemannschen Raume V_n sei ein V_{n-1} mit dem Fundamentaltensor $g'_{\lambda\mu}$ gegeben. Wenn v'_λ die Tangentialkomponente in V_{n-1} eines längs V_{n-1} gegebenen Vektorfeldes v_λ ist, so ist $g'_\lambda{}^\alpha g'_\mu{}^\beta V_\alpha v_\beta = V'_\lambda v'_\mu - v_\nu H_{\lambda\mu}{}^{;\nu}$ (Struik, Grundzüge der mehrd. Differentialgeometrie, Berlin 1923, S. 94, Formel 144). Die Autorin wendet solch eine Formel auf den speziellen Fall $n=3$, $V_3=R_3$ an, um den Zusammenhang zwischen $dx^\lambda dx^\mu V_\lambda v_\mu$ (dx in V_2) und dem von Cisotti eingeführten formalen Begriff des reziproken Vektors anzugeben. Außerdem werden mit Hilfe dieses Begriffes auch andere Formeln umgeschrieben, z. B. $\frac{\partial m}{\partial x^\lambda} i^\lambda i_\mu$, $\left(i^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}\right)$ usw.

Hlavatý.

Cisotti, U.: Deduzioni differenziali dalla definizione di vettori reciproci: Derivazioni successive e monogeneità à in superficie. IV. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 469—472 (1933).

Aus der Struikschen Formel, die in dem vorst. Referat über die Arbeit von Pastori Maria angeführt wurde, folgt unter Voraussetzung $\frac{1}{2} g'_\lambda{}^\alpha g'_\mu{}^\beta (V_\mu v_\lambda + V_\lambda v_\mu) = \varrho g'_\lambda{}^\mu$ (wegen der Bedeutung dieser Formel siehe dies. Zbl. 7, 228) für zwei beliebige orthogonale Einheitsvektoren i_k^ν ($k=1, 2$) in V_{n-1} $\left(i_1^\mu i_1^\lambda - \frac{1}{2} i_2^\mu i_2^\lambda\right) (V'_\mu v_\lambda - v_\nu H_{\lambda\mu}{}^{;\nu}) = 0$. Der Verf. leitet in einer anderen Form diese und andere verwandte Formeln für den speziellen Fall $n=3$, $V_3=R_3$ ab, indem er sich des Begriffes des „reziproken Vektors“ bedient (vgl. dies. Zbl. 7, 228; 8, 83 und 178).

Hlavatý (Praha).

Agostinelli, C.: Le condizioni di Saint-Venant per le deformazioni di una varietà riemanniana generica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 529—533 (1933).

Der Verf. verallgemeinert die Ergebnisse von Andruetto Giacinta (vgl. dies. Zbl. 4, 162 und 416), in dem er eigentlich die Integrabilitätsbedingungen des Systems $2w_{\mu\lambda} = V_\mu v_\lambda + V_\lambda v_\mu$ ($w_{\mu\lambda}$ bekannt) in dem Riemannschen Raume V_n aufsucht. Deutet man v_λ als Deformationsvektor, so handelt es sich also um Bedingungen, wann ein gegebener symmetrischer Tensor als Deformationstensor aufgefaßt werden darf (die Bedingungen von Saint-Venant). Die Arbeit ist in der italienischen Symbolik geschrieben.

Hlavatý (Praha).

Haimovici, M.: Formules fondamentales dans la théorie des hypersurfaces d'un espace de Finsler. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 426—427 (1934).

In this note the second fundamental form (Ω) for a hypersurface of a Finsler space is defined. From it the author obtains equations which are similar to those of Gauss and Codazzi in Riemann spaces. The method is identical with that usually employed. The equations of Gauss must give the components of the curvature tensor of the hypersurface explicitly since they can be computed as soon as the induced metric is known. The relations given in this paper are implicit.

M. S. Knebelman (Princeton).

Topologie:

Favard, J.: Sur la surface dont le bord est donnée. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 225—227 (1934).

The following definitions will be used (for the sake of brevity, we shall slightly modify the notations of the author). A set E is called irreducible with respect to a property P , if E has the property P but no true sub-set of E has the property P . A bounded and closed set E in the three-dimensional space is called enlaçable, if there exists a Jordan curve C with the following properties. α) C has no point in common with E . β) It is impossible to reduce C , by continuous deformation, into a point not in E , without meeting E . A set E which is irreducible with respect to the property of being enlaçable, is called a set I and is considered by the author as a generalization of a closed curve. — Let there be given a set I and a Jordan curve C which has no point in common with I , and which cannot be reduced, by continuous deformation, to a point not in I without meeting I . Then there exist sets K with the following properties. 1°. I is a subset of K . 2°. Every Jordan curve, which is derived from C by continuous deformation without meeting I , has at least one point in common with K . A set K which is irreducible with respect to the properties 1° and 2°, is called a set S and is considered by the author as a generalized surface bounded by the generalized closed curve I . The purpose of the paper is to analyze these general notions.

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Stoilow, S.: Sur les transformations continues des espaces topologiques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 35, 229—235 (1934).

Two Hausdorff spaces are given, each connected in the sense that any two points can be joined by a curve, and having the property that any closed curve in either space can be deformed into an arbitrary point of the curve by a deformation over points of the space which keeps the particular point fixed. A transformation of one space into points of the other is proved to be a homeomorphism if it is continuous, one-to-one in the small, and has the property that for each curve of the first space if a point traverses the curve and does not approach a limit-point, then the image point cannot approach a limit-point. The proof consists principally in showing that the second space is completely covered. Earlier results on the same question are due to J. Hadamard (Bull. Soc. Math. France 1906) and to Carathéodory and Rademacher (Arch. Math. u. Physik, III. Reihe 26, 1), and Carathéodory [Bull. Soc. Math. Grèce 5, 12 (1924)]. An application is made by the author to interior transformations, introduced by him in 1928 (Ann. École norm. 45, 348).

Brown (New York).

Moore, R. L.: Concerning compact continua which contain no continuum that separates the plane. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 41—45 (1934).

Verallgemeinerung eines Lemmas von Mazurkiewicz über saturierte Bögen in den Baumkurven [Fundam. Math. 2, 129 (1921)] auf ebene Kontinua K , deren keine Teilkontinua die Ebene zerschneiden. Es wird gezeigt, daß in einem solchen Kontinuum K jedes zwischen zwei Punkten irreduzible Teilkontinuum T auf einem in bezug auf diese Eigenschaften saturierten Teilkontinuum S von K liegt (derart also, daß jedes das Kontinuum S enthaltende und zwischen irgend zwei Punkten irreduzible Teilkontinuum von K mit S zusammenfällt). Folgerung: Ist überdies K im Sinne vom Verf. atriodisch (d. h. frei von Teilkontinuentripeln A, B, C mit $AB = AC = BC = ABC = \text{Kontinuum}$), so ist K selbst ein zwischen zwei Punkten irreduzibles Kontinuum.

B. Knaster (Warszawa).

Quantentheorie.

● **Heisenberg, W., E. Schrödinger und P. A. M. Dirac:** Die moderne Atomtheorie. Leipzig: S. Hirzel 1934. 45 S. u. 6 Fig. RM. 2.50.

Darrow, Karl K.: Elementary notions of quantum mechanics. Rev. Modern Physics 6, 23—68 (1934).

Wentzel, Gregor: Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. III. Z. Physik 87, 726—733 (1934).

In Weiterverfolgung der in den beiden gleichnamigen Arbeiten des Verf. (Teil I vgl. dies. Zbl. 8, 38; Teil II 8, 90) entwickelten interessanten Ideen werden Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe einer Mittelwertbildung definiert. Ihre zeitlichen Änderungen entsprechen dem in I und II vorgeschlagenen Kraftansatz. Das Feld eines klassisch gleichförmig bewegten Elementarteilchens hat danach die Energie und den Impuls Null. Die Mittelwerte der energetischen Feldgrößen sind nicht als Raumintegrale über klassische Dichtefunktionen darstellbar; auf die Vorstellung einer räumlichen Verteilung dieser Größen wird man daher konsequenterweise verzichten müssen.

V. Fock (Leningrad).

Fock, V.: Zur Theorie der Positronen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr 6, 265—267 u. dtsh. Text 267—271 (1933) [Russisch].

Anlehnung an die von Heisenberg entwickelte Quantenmechanik eines „Loches“ in einer vollständigen Elektronengruppe wird eine Formulierung für die Diracsche Löchertheorie gegeben, in der nur Elektronen und Positronen in positiven Energiezuständen auftreten. Es werden gewisse Schwierigkeiten, u. a. Mangel der Theorie an Eichinvarianz, besprochen.

O. Klein (Stockholm).

Glaser, Walter, und Kurt Sitte: Elementare Unschärfen, Grenze des periodischen Systems und Massenverhältnis von Elektron und Proton. Z. Physik 87, 674—686 (1934).

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Genauigkeitsschranke $\Delta t = \hbar/mc^2$ für Zeitmessungen an einem Teilchen von der Masse m . Verff. versuchen, aus dieser elementaren Unschärfe 1. eine obere Grenze für die Atomnummer Z und 2. das Massenverhältnis $\mu = m_p/m_e$ von Proton und Elektron abzuleiten. Ersteres wird erreicht, indem ein geeignet definiertes quantenmechanisches Analogon zur Umlaufzeit eines Elektrons der K -Schale gleich Δt gesetzt wird. Z ergibt sich aus den Gleichungen

$$2\lambda^4 - 6\lambda^2 + \lambda + 2 = 0; \quad \lambda^2 = 1 - Z^2 \alpha^2.$$

Das Massenverhältnis $\mu = m_p/m_e$ wird weiterhin mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{r} = \frac{15}{32} \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right) = \frac{\hbar}{(m_e + m_p)c} = c \Delta t$$

errechnet, wo die Größe \bar{r} links die „Ausdehnung des Neutrons“ und die Größe $c \Delta t$ rechts die elementare Unschärfe in der Koordinatenbestimmung bedeuten soll. Merkwürdigerweise ergeben diese Betrachtungen, die ja höchstens größenordnungsmäßig richtig sein können, nahezu exakte Werte für Z und μ , nämlich $Z = 90,5 \pm 0,5$ und $\mu = 1838,5 \pm 0,6$.

V. Fock (Leningrad).

Proca, Al.: Mécanique quantique des photons. Approximation de Pauli. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 452—454 (1934).

L'a. introduit deux „fonctions d'onde d'un photon“ ψ_1 et ψ_2 et deux opérateurs différentiels u_1 et u_2 qui contiennent les dérivées d'ordre fractionnaire. Les fonctions ψ_1 et ψ_2 ainsi que les opérateurs u_1 et u_2 se transforment comme des spineurs. Les composantes du champ de l'onde lumineuse qui correspond à un photon sont alors des combinaisons linéaires des quantités $u_i \psi_j$ ($i, j = 1, 2$) et des quantités conjuguées. Ce champ satisfait aux équations de Maxwell si les ψ_j satisfont à celles de Dirac (avec $m = 0$). L'a. arrive à la conclusion qu'„un photon correspond toujours à une lumière polarisée circulairement dans un certain sens si l'énergie est positive, et en sens contraire si l'énergie est négative“.

V. Fock (Leningrad).

Proca, Al.: Ondes et photons. I. Approximation de Schrödinger. J. Physique Radium, VII. s. 5, 6—19 (1934).

En faisant abstraction de la polarisation de la lumière („approximation de Schrödinger“) l'a. écrit les composantes du champ d'une onde lumineuse qui correspond à un photon sous la forme $\mathfrak{E}_x = X\psi$ etc., où ψ est la „fonction d'onde d'un photon“ qui satisfait à l'équation $\square\psi = 0$ et X un opérateur qui contient les dérivées d'ordre

fractionnaire. Le procédé adopté par l'a. se réduit en substance à ceci: l'intégrale de Fourier

$$\mathfrak{E}_x = \int e^{i\mathfrak{f} \cdot \mathbf{r} - i c |\mathfrak{f}| t} X(\mathfrak{f}, |\mathfrak{f}|) \varphi(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{f}_3$$

est remplacée par l'expression

$$\mathfrak{E}_x = X \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \int e^{i\mathfrak{f} \cdot \mathbf{r} - i c |\mathfrak{f}| t} \varphi(\mathfrak{f}) d\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{f}_2 d\mathfrak{f}_3.$$

L'a. rattache à ces considérations (développés dans l'espoir d'éliminer certaines difficultés de la théorie du rayonnement) la discussion de la „densité d'énergie d'un photon“.

V. Fock (Leningrad).

Géhéniau, J.: Sur les équations de Dirac du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 713—716 (1934).

Bekanntlich genügt jede Lösung der Diracschen Wellengleichung des Elektrons auch einer gewissen Gleichung zweiter Ordnung, welche sich von der älteren Schrödingerschen relativistischen Gleichung nur durch das Spin-Zusatzglied (proportional mit $\sigma_k \sigma_l F^{kl}$) unterscheidet. Das Umgekehrte ist aber nicht der Fall: es zeigt sich jedoch, daß die Gleichung zweiter Ordnung äquivalent ist einem System von acht (statt vier) Gleichungen ersten Grades, welche insbesondere durch jede Lösung der Diracschen Gleichungen befriedigt werden.

P. Jordan (Rostock).

Reichenbächer, Ernst: Über den Zusammenhang der Wellengleichung II. Ordnung mit einem äquivalenten System von Gleichungen I. Ordnung und die Deutung dieses Zusammenhanges in einer nichtriemannschen Differentialgeometrie. Physik. Z. 35, 150—160 (1934).

Erweiterter Bericht über frühere in der Z. Physik erschienene Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 3, 285) des Verf. über denselben Gegenstand (Zweikomponententheorie).

V. Fock.

Goldstein, L.: Sur une théorie de quantification de la matière. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 716—718 (1934).

Nachträgliche Bemerkungen zu den beiden vorangehenden Noten des Verf. (Vgl. dies. Zbl. 8, 282.)

P. Jordan (Rostock).

Loève: Sur l'intégration des équations de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 799 bis 801 (1934).

Es werden diejenigen Lösungen der Diracschen Gleichung des kräftefrei bewegten Elektrons untersucht, welche ebene Wellen (eindimensional fortlaufend) darstellen. Die explizite Konstruktion der zu vorgegebenem Anfangszustand gehörigen Lösung dieser Art kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie es nach den Integrationsmethoden von Riemann und Poincaré bei der gewöhnlichen Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung geschieht. Im Ergebnis dieser Konstruktion treten Besselfunktionen auf.

P. Jordan (Rostock).

Satô, Mizuho: Zusammenhang zwischen der H -Funktion und der Entropie nach der Fermischen Statistik. Z. Physik 87, 498—499 (1934).

In der vorliegenden Arbeit glaubt der Verf. den Beweis geführt zu haben, daß auch in einem Fermigas zwischen der Entropie S und der Boltzmannschen H -Funktion der bekannte Zusammenhang $S = -k \cdot H$ besteht. [Der Beweis ist jedoch, wie der Ref. gezeigt hat, hinfällig (vgl. dies. Zbl. 8, 287).]

Fürth (Prag).

Fock, V. A.: Angenäherte Darstellung der Wellenfunktionen durchdringender Bahnen. C. R. Acad. Sci. URSS 1, 241—244 u. dtsh. Text 244—247 (1934) [Russisch].

Es wird für die eindringenden Bahnen großer Hauptquantenzahl n eines Elektrons im zentralen Atomfeld eine angenäherte Darstellung des radialen Teils der Wellenfunktion angegeben. Die benutzte Methode ist der von Kramers bei der Deutung der halbzahligen Quantisierung verwendeten ähnlich.

R. de L. Kronig (Groningen).

Elsasser, W. M.: Équations du mouvement d'un neutron. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 441—443 (1934).

Verf. konstruiert mit Hilfe der Diracschen Matrizen einen Hamiltonschen Operator, der einem ungeladenen Teilchen mit magnetischem Moment in einem elektromagne-

tischen Feld entspricht. Der Operator enthält als unbekannte Konstanten die Masse m und das magnetische Moment μ des Teilchens. Die Bewegungsgleichungen werden abgeleitet und daraus für den Fall eines zentralsymmetrischen elektromagnetischen Feldes einige Konsequenzen gezogen. *R. de L. Kronig* (Groningen).

● **Mitchell, Allan C. G., and Mark W. Zemansky: Resonance radiation and excited atoms.** (Cambridge ser. of physical chem. Edited by E. K. Rideal.) Cambridge: Univ. press 1934. XVI, 338 S. u. 84 Fig. geb. 18/-.

Eine zusammenfassende Übersicht der verschiedenen mit der Resonanzstrahlung verknüpften Erscheinungen, wobei der Nachdruck gelegt wird auf eine einheitliche theoretische Deutung der Ergebnisse vom Standpunkt der Quantentheorie. Gekürzte Inhaltsangabe: I. Vorbereitendes über Atome und Spektrallinien — Experimentelle Methoden — Einfachste Fälle von Resonanzstrahlung. II. Stufenweise Anregung — Sensibilisierte Fluoreszenz — Chemische Reaktionen unter Einfluß angeregter Atome. III. Absorptionslinien — Bestimmung der Lebensdauer angeregter Zustände — Magnetorotation und anomale Dispersion am Rand einer Spektrallinie. IV. Stoßprozesse: Stoßverbreiterung — Kopplungsverbreiterung — Auslöschung der Resonanzstrahlung — Stöße metastabiler Atome. V. Polarisation der Resonanzstrahlung (insbesondere wird auch der Einfluß der Hyperfeinstruktur diskutiert).

Casimir (Leiden).

Johnson jr., M. H.: On the vector model for almost closed shells. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 117—120 (1934).

Nahezu abgeschlossene Elektronenschalen eines Atoms machen es vorteilhaft, nicht die Elektronen, sondern die Löcher dieser Schalen als Bausteine des Atoms aufzufassen. Die Durchführung dieser Idee bei der Untersuchung und Berechnung der Multipllett-Terme usw. gestaltet sich sehr einfach und erfolgreich durch Heranziehung der Methode der „zweiten Quantelung“.

P. Jordan (Rostock).

Brill, Rudolf: Über Teilchengrößenbestimmungen mit Elektronenstrahlen. Z. Kristallogr. A 87, 275—280 (1934).

Nach der Laueschen Methode wird die Breite von Interferenzringen in einem Pulverdiagramm mit Elektronenstrahlen berechnet. Das Präparat ist in der Form einer Folie angenommen, und für die Streuung der Elektronenstrahlen wird die im Falle von Röntgenstrahlen gültige Interferenzfunktion angesetzt (was für schnelle Elektronen erlaubt ist). Dementsprechend ergibt sich im Resultat auch eine Formel, die mit der von Scherrer für Röntgenstrahlen abgeleitet ist.

R. Peierls.

Sommerfeld, A.: Zur Elektronentheorie der Metalle. Naturwiss. 22, 49—52 (1934).

Messungen über den Thomseffekt der Alkalien zeigen, daß dieser sich bezüglich Vorzeichen, Größenordnung und Temperaturabhängigkeit gut dem Bilde der elementaren Theorie (gänzlich freie Elektronen, langsam veränderliche freie Weglänge) einordnet, was bekanntlich bei den meisten anderen Metallen nicht der Fall ist. Es wird auf eine empirische Relation von Rother und Bomke [Z. Physik 86, 231 (1933)] hingewiesen, die die Austrittsarbeiten der Metalle als Funktion der Gitterkonstanten und einiger anderer Parameter beschreiben soll und von der behauptet wird, daß sie auch theoretisch plausibel sei.

R. Peierls (Manchester).

Kronig, R. de L., and H. J. Groenewold: On the Lorentz-Lorenz correction in metallic conductors. Physica 1, 255—264 (1934).

Es wird der Effekt des Mitschwingens der Elektronen in der Dispersionstheorie der Metalle berücksichtigt, entsprechend der Lorentz-Lorenz-Korrektion der gewöhnlichen Optik. Die erhaltenen Formeln werden an einem Spezialfall diskutiert, aus dem hervorgeht, daß der allgemeine Charakter der Erscheinungen nicht geändert wird, aber die Lage und Oszillatorenstärken der Resonanzfrequenzen beeinflußt werden können. Für freie Elektronen (Sommerfeld) verschwindet die Korrektur.

Nordheim (Paris).

Braunbek, W.: Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Supraleiter. *Z. Physik* 87, 470—483 (1934).

Das genannte Problem wird unter der Annahme behandelt, daß die Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante (Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante) dieselbe Beziehung ist wie in der klassischen Elektronentheorie, in der eine phänomenologische Dämpfung der Elektronen auftritt, wobei man nur den Grenzübergang zu verschwindender Dämpfung machen muß. Eine physikalische Begründung dieser Annahme wird nicht gegeben. *R. Peierls.*

Gorter, C. J., and H. Casimir: On supraconductivity. I. *Physica* 1, 306—320 (1934).

Es wird eine konsequente thermodynamische Behandlung der Supraleitung gegeben unter der (durch neuere Experimente nahegelegten) Annahme, daß das Feld \mathfrak{H} im Supraleiter stets verschwindet, sich also beim Übergang persistente Ströme ausbilden, die das Magnetfeld abschirmen. Es wird so unter anderem die Rutgersche Beziehung zwischen dem magnetischen Grenzfeld und dem Sprung der spezifischen Wärmen wiedergefunden und eine Begründung der Silsbeeschen Regel (Zerstörung der Supraleitung durch das Eigenfeld des Stromes bei hohen Stromdichten) erhalten. *Nordheim (Paris).*

Kramers, H. A.: L'interaction entre les atomes magnétogènes dans un cristal paramagnétique. *Physica* 1, 182—192 (1934).

Untersuchung der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Atomen eines Kristalls, der einen Spin-Paramagnetismus besitzt. Außer der magnetischen Wechselwirkung existieren noch Austauschkräfte, die den beim Ferromagnetismus auftretenden analog sind, mit dem Unterschied, daß es sich hier um Salze handelt, in denen die magnetischen Atome einander nicht benachbart sind. Der direkte Austausch von Elektronen zwischen ihnen kann daher vernachlässigt werden. Es gibt aber eine Möglichkeit eines kettenförmigen Austausches unter Mitwirkung der dazwischenliegenden (unmagnetischen) Atome, die dabei zeitweilig angeregt werden. Es wird gezeigt, daß derartige Effekte erst in der dritten Näherung bezüglich der Austauschkräfte zwischen Nachbarn zu erwarten sind. *R. Peierls (Manchester).*

Becker, R.: Über die Magnetostriktion von ferromagnetischen Ellipsoiden. I. Theorie. *Z. Physik* 87, 547—559 (1934).

Die Abhängigkeit der Magnetostriktion eines Ellipsoids von seinem Dimensionsverhältnis läßt sich rein phänomenologisch streng durchführen. Man erhält verschiedene Formeln, je nachdem ob man sich im Gebiet der Anfangspermeabilität, im Gebiet der Drehprozesse (technische Magnetisierung) oder oberhalb der technischen Sättigung befindet. Nach Elimination des so berechneten Struktureffekts kann man aus den Messungen den reinen „Kristalleffekt“ entnehmen, d. h. die Abhängigkeit der magnetischen Anisotropie vom Volumen. *R. Peierls (Manchester).*

Gentile, G.: Sopra la teoria della rimanenza e della curva di magnetizzazione. *Nuovo Cimento, N. s.* 11, 20—33 (1934).

Nach Bloch kann man das quantenmechanische Problem eines großen ferromagnetischen Kristalls näherungsweise so behandeln, daß man die Komponenten des magnetischen Moments jedes Atoms als miteinander vertauschbar behandelt. Verf. weist darauf hin, daß diese Näherung nicht streng zulässig ist, und versucht statt dessen ein anderes Verfahren zu konstruieren, wobei man die Komponenten des Moments nicht eines Atoms, sondern einer Gruppe von Atomen als gleichzeitig meßbar behandelt, was eine um so bessere Näherung ist, je größer die Gruppen sind, jedoch auch um so schwerer durchzuführen. Es wird behauptet, daß sich auf diese Weise die Blochschen Resultate reproduzieren lassen. *R. Peierls (Manchester).*

Akulov, N.: Zur Theorie der Hall-, Nernst-, Ettingshausen- und Righi-Leduc-Effekte. (Verallgemeinerung des Gesetzes von der ferromagnetischen Anisotropie.) *Z. Physik* 87, 768—777 (1934).

Bei der Magnetisierung von Ferromagneten in nicht zu starken Feldern ändert sich

die Stärke der Magnetisierung in jedem Teilgebiet nicht, sondern nur ihre Richtung. Es genügt also, die Richtungsabhängigkeit der verschiedenen Effekte zu kennen, um ihre Abhängigkeit von der Magnetisierungsintensität zu berechnen. Diese Richtungsabhängigkeit wird nach Kugelfunktionen entwickelt, wobei man sich aber mit dem ersten Glied der Entwicklung begnügt („Gesetz der ferromagnetischen Anisotropie“).

R. Peierls (Manchester).

Bronstein, M.: Über die Gültigkeitsgrenzen der Formel von Klein-Nishina. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr 6, 272—273 u. dtsh. Text 273—275 (1933) [Russisch].

Auf Grund einer Invarianzbetrachtung wird als plausible obere Gültigkeitsgrenze für die aus der Diracschen Theorie abgeleitete Compton-Intensitätsformel ein Lichtquant von der Größenordnung 10^7 Elektron-Volt angegeben, eine Grenze, die wesentlich niedriger liegt als früher von Bohr vermutet wurde.

O. Klein (Stockholm).

Soden, Dietrich Graf: Ionisierung der K-Schale durch Elektronenstoß. Ann. Physik, V. F. 19, 409—433 (1934).

Es wird versucht, die Ionisierungswahrscheinlichkeit der K-Schale durch Elektronenstoß zu berechnen für den Fall, daß die Energie des stoßenden Teilchens nur wenig oberhalb der Ionisierungsenergie liegt und die Bornsche Methode versagt. Als Wellenfunktionen nullter Näherung werden für das stoßende Elektron nicht (wie in der Bornschen Methode) ebene Wellen, sondern die Wellenfunktionen eines sich im mittleren (Fermischen) Potential des Atoms bewegenden Teilchens gewählt. Als Störung hat man jetzt den Unterschied zwischen wirklichem und mittlerem Potential zu betrachten. Ihre Matrixelemente liefern in üblicher Weise die Übergangswahrscheinlichkeiten (dabei bleibt der Austausch unberücksichtigt). Die Rechnung wird numerisch durchgeführt für den Fall, daß auch der Endzustand des gestoßenen Elektrons ein S-Zustand ist. Die Ergebnisse sind von den nach der Bornschen Methode berechneten wesentlich verschieden. Um einen Vergleich mit der Erfahrung zu ermöglichen, werden die Übergangswahrscheinlichkeiten zu Nicht-S-Zuständen sowie der Austausch mit Hilfe qualitativer Überlegungen roh abgeschätzt. *Casimir (Leiden).*

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Milankovitch, M.: Säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr 1, 13—16 (1933).

Uller, Karl: Die Entwicklung des Wellen-Begriffes. VII. Gerlands Beitr. Geophys. 41, 225—249 (1934).

Verf. gibt eine zusammenhängende Darstellung der von ihm aufgestellten Wellentheorie, wobei er sich im Gegensatz zu den bisherigen Abhandlungen nicht mehr auf Erregungen von elementarer Schwingungsform beschränkt. Er entwickelt aus verschiedenen Feldgleichungen, entsprechend verschiedenen Gebieten der Physik, die Gleichungssysteme der möglichen Wellengattungen (VI. vgl. dies. Zbl. 2, 259). *Gradstein.*

Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology. Nr. 17. January, February, March, 1933. Publ. Dominion Observ. Ottawa 10, 287—302 (1933).

Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology. Nr. 18. April, May, June, 1933. Publ. Dominion Observ. Ottawa 10, 303—318 (1933).

Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology. Nr. 19. July, August, September, 1933. Publ. Dominion Observ. Ottawa 10, 319—336 (1933).

Lowan, Arnold N.: On the cooling of a radioactive sphere. Physic. Rev., II. s. 44, 769—775 (1933).

Laplace's transformation is used for the problem of the cooling of a heterogeneous radioactive sphere with spherical symmetry both as regards its physical properties and its initial temperature distribution. The general case, in which the sphere radiates into a medium whose temperature is $F(t)$, is first treated and then the special case

$F(t) = 0$ is considered. The results for a homogeneous sphere are used in a discussion of the thermal history of the earth and the effect on the present day temperature distribution of fluctuations in the assumed initial temperature distribution or in the assumed average value of the thermal diffusivity is found to be inappreciable at a depth of a few hundred kilometres. *H. Bateman (Pasadena).*

Kuraisi, Rokuro: On the conduction of heat in a semi-infinite solid partially covered with insulating material. *Geophys. Mag.* 6, 335—346 (1932).

Integration der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \cdot \Delta \theta$ mit der Randbedingung, daß die Oberfläche eines isotropen Körpers (unendlicher Dicke) in äquidistanten Streifen oder Rechtecken mit isolierendem Material bedeckt ist und an die nichtisolierten Stellen die Temperatur als periodische Funktion der Zeit gegeben ist. Die Lösungen werden in Form zweidimensionaler Fourier-Reihen dargestellt und auf den täglichen Gang der Erdbodentemperatur angewandt. *H. Ertel (Berlin).*

Stefanescu, Sabba S.: Théorie du plan conducteur pour l'émetteur alternatif de longueur finie. *Beitr. angew. Geophys.* 4, 165—185 (1934).

Eine geoelektrische Methode beruht darauf, daß ein geradlinig und horizontal geführter primärer Wechselstrom im leitenden Erdboden Sekundärströme induziert. Die Vermessung des so erzeugten elektromagnetischen Feldes an der Oberfläche kann Aufschluß über die Beschaffenheit des Untergrundes geben. Die Theorie dieser Methode liegt für einfache tektonische Verhältnisse, nämlich für den Fall einer zur Erdoberfläche planparallelen leitenden Schicht im nichtleitenden Muttergestein, bereits vor, doch nur unter der Annahme, daß der Primärstrom durch eine unendlich ausgedehnte geradlinige Einfachleitung fließt. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie auf den praktisch wichtigen Fall einer endlichen Leitung verallgemeinert. Man geht hierzu von dem Felde eines Dipols aus, für das H. v. Hoerschelmann, *Jb. drabtl. Telegr. u. Telef.* 1911, S. 5, 14 u. 188, die Formeln geliefert hat. Die Symmetrieverhältnisse gestatten die Anwendung von Zylinderkoordinaten und liefern für die Feldgrößen Darstellungen durch Besselsche Funktionen nullter und erster Ordnung. Durch Aneinanderreihen der einzelnen Dipole gelangt man zu einem endlich ausgedehnten Leiter, wie vom Autor in Zusammenarbeit mit C. und M. Schlumberger bereits in einer früheren Arbeit — *Études théoriques sur la prospection électrique du sous-sol*, II série 1932. *Publ. de l'Institut Géologique de Roumanie* — ausgeführt ist. Es wird eingehender der Fall eines Untergrundes behandelt, der aus zwei planparallelen Schichten verschiedener, aber endlicher Leitfähigkeit besteht. Die für die Praxis wichtigen Formeln werden herausgestellt und die Ergebnisse experimenteller Messungen mitgeteilt. *J. N. Hummel (Göttingen).*

Störmer, Carl: On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole with applications to the theory of cosmic radiation. II. *comm.* *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* Nr 2, 1—47 (1934).

I. vgl. dies. *Zbl.* 8, 236.

Nomitsu, Takaharu: A theory of the rising stage of drift current in the ocean. II. The case of no bottom-friction. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* 16, 275—287 (1933).

Gemäß der gewöhnlichen Annahme in der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten verschwindet an festen Grenzen die Bewegung. Dementgegen wird hier vorausgesetzt, daß die Bewegungskomponente parallel zur Wand von Null verschieden sein kann, da eine derartige Annahme durch die ozeanographischen Beobachtungen nahegelegt wird. Die Viskosität wird in der ganzen Flüssigkeit als konstant behandelt. Das Problem ist durch bekannte mathematische Methoden lösbar. Verglichen mit den vom Verf. früher unter der Annahme verschwindender Geschwindigkeit am Boden erhaltenen Resultaten ergibt sich: Je seichter die See ist, desto stärker werden Triftstrom und Ablenkungswinkel vom Wind, entgegengesetzt zum Fall der Grenzflächenreibung, während bei unendlich großer See beide Fälle gleiches Resultat ergeben. Die Ge-

schwindigkeit des entstehenden Stromes oszilliert um den stationären Wert mit einer Periode von einem halben Pendeltag und erreicht diesen Wert nur in unendlich tiefem Wasser. Der Hodograph hat einen asymptotischen Kreis, dessen Radius umgekehrt proportional der Meerestiefe ist. Die Partikel beschreiben daher schließlich Zykloiden. Während bei der Ableitung zunächst konstanter Wind vorausgesetzt war, gibt Verf. in Form einer Integraldarstellung auch den Ausdruck, wenn der Wind eine beliebige Funktion der Zeit ist (I. vgl. dies. Zbl. 7, 282). *B. Haurwitz* (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu, and Tohichiro Takegami: A theory of the rising stage of drift current in the ocean. III. The case of a finite bottom-friction depending on the slip velocity. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 309—331 (1933).

Nomitsu hatte früher gezeigt (vgl. vorst. Referat), daß in einem seichten Ozean ein großer Unterschied zwischen den beiden Grenzfällen „kein Bodenstrom“ und „keine Bodenreibung“ besteht. Deshalb wird das Problem hier unter den beiden experimentell gestützten Annahmen behandelt, daß am Boden ein Widerstand herrscht proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit für schnelle Strömungen, proportional der Geschwindigkeit selbst für langsame Strömungen. Die Behandlung der stationären Strömung zeigt, daß in einer gegebenen geographischen Breite mit größerer Windgeschwindigkeit oder kleinerer Zähigkeit das Verhältnis der Geschwindigkeit am Grund zur Windgeschwindigkeit zunimmt bis zu einem bestimmten Grenzwert. Dieses Verhältnis ist ferner um so kleiner, je größer die Tiefe des Ozeans ist. Für einen tiefen Ozean ist der Strom annähernd der gleiche wie in den beiden früher untersuchten Grenzfällen. In einem seichten Meeresbecken nähert sich das Strombild bei starkem Winde oder kleiner Zähigkeit dem Grenzfalle „kein Bodenstrom“, bei schwachem Winde oder großer Zähigkeit dem Grenzfalle „keine Bodenreibung“. Im Stadium des Beginnens oszilliert der Strom wieder mit der Periodenlänge von einem halben Pendeltag. *B. Haurwitz* (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu: On the development of the slope current and the barometric current in the ocean. I. The case of no bottom-current. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 203—214 (1933).

In Ergänzung Ekmanscher Arbeiten, in denen ein stationärer Gradientstrom (slope current) untersucht war, behandelt Verf. die zeitliche Entwicklung eines solchen Stromes in einem unendlich ausgedehnten Ozean gleichmäßiger Tiefe und Dichte, wenn der Strom sich entwickelt, nachdem ein räumlich und zeitlich konstantes Gefälle der Meeresoberfläche hergestellt ist. Als Randbedingung am Meeresboden wird Nullwerden der Geschwindigkeit angenommen. Die Zeit bis zur Erreichung des stationären Zustandes ist im wesentlichen die gleiche wie für einen Triftstrom. Die Oszillationsperiode um den stationären Zustand ist 12 Pendelstunden. Die Lösung für zeitlich veränderliches Gefälle der Meeresoberfläche wird ebenfalls angegeben. Auf einen Strom, der lediglich durch ein Luftdruckgefälle erzeugt wird (barometric current), lassen sich die gewonnenen Formeln ohne weiteres übertragen. Verf. setzt auseinander, daß in einem räumlich weit ausgedehnten Ozean ein derartiger Strom lange erhalten bleiben kann, während in küstennahen Gegenden eine in wenigen Stunden entstehende Neigung der Meeresoberfläche die Wasserbewegung zum Stillstand bringt.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu, and Tohichiro Takegami: On the development of the slope current and the barometric current in the ocean. II. Different bottom-conditions assumed. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 333—351 (1933).

In Ergänzung einer früheren Arbeit des einen Verf. (vgl. vorst. Referat) werden jetzt andere Annahmen über die Reibung am Meeresboden gemacht. Wird zunächst gar keine Bodenreibung angenommen, so ist der stationäre Gradientstrom unabhängig von der Tiefe und senkrecht zum sole zur Richtung des Gefälles. Der Hodograph des beginnenden Stromes ist ein Kreis. Wird Reibung am Boden proportional der ersten oder zweiten Potenz der Geschwindigkeit am Boden angenommen, so ist für starkes

Gefälle und geringe Zähigkeit der Strom ähnlich dem Falle, wenn kein Bodenstrom vorhanden ist, während für schwaches Gefälle und große Zähigkeit er sich dem Falle „keine Bodenreibung“ nähert. Das Stadium des sich entwickelnden Stromes wird der rechnerischen Schwierigkeiten wegen übrigens nur unter der Annahme behandelt, daß die Bodenreibung proportional der ersten Geschwindigkeitspotenz ist.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu: On the density current in the ocean. I. The case of no bottom-current. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 261—274 (1933).

Zuerst wird der Fall eines Stromes behandelt, der nur durch (plötzlich entstandene) Dichteunterschiede erzeugt ist unter der üblichen Voraussetzung, daß der Strom am Boden verschwindet. Ein solcher Strom würde seinen stationären Wert nach einigen Stunden oder höchstens Tagen erhalten. Gleiches gilt für das Abklingen bei plötzlichem Verschwinden des Dichtegradienten. Da die Dichte des Wassers sich nur in wesentlich längeren Zeiträumen merkbar ändert, kann der Dichtestrom immer als stationär angesehen werden. Weiterhin wird der Konvektionsstrom behandelt, zusammengesetzt aus einem reinen Dichtestrom und einem Gradientenstrom, etwa erzeugt durch Stau des Gradientenstromes am Land. Der von Ekman untersuchte Fall, daß die Küste senkrecht zum Dichtegradienten des Wassers liegt, bedarf nach dem Verf. einiger Richtigestellungen. Insbesondere existiert gemäß dem Verf. eine Stromkomponente in der horizontalen Isobarenebene, im Gegensatz zu Ekman. Schließlich werden die Fälle besprochen, daß der Dichtegradient parallel oder unter 45° gegen die Küste geneigt ist.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu: On the density current in the ocean. II. The case of no bottom-friction. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 383—396 (1933).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. vorst. Referat) wird jetzt Verschwinden der Bodenreibung angenommen. Betrachtung des nichtstationären Zustandes kann nach den Ergebnissen jener Arbeit unterbleiben. Für eine unendlich ausgedehnte See, in der der Gradientenstrom keine Störung der horizontalen Lage der Oberfläche hervorruft, ergibt sich, daß bei geringer Tiefe und bei großer Tiefe in den untersten Schichten die Voraussetzungen „kein Bodenstrom“ und „keine Bodenreibung“ sehr verschiedene Strombilder ergeben, während im oberen Teil eines sehr tiefen Ozeans das Strombild nicht wesentlich von diesen Voraussetzungen beeinflußt wird. Bei ein- oder allseitiger Begrenzung des Meeres ergibt sich ein Konvektionsstrom, dessen Diskussion den Verf. schließen läßt, daß das Ekmansche Stromdiagramm nur den Spezialfall eines Konvektionsstromes in einer allseitig eingeschlossenen See ohne Bodenreibung darstellt. Die Fehlerquellen in der Ekmanschen Theorie und in einer Arbeit von Hidaka werden besprochen.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Nomitsu, Takaharu, and Tohichiro Takegami: On the density current in the ocean. III. The case of a finite bottom-friction depending on the slip velocity. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 16, 397—408 (1933).

In Ergänzung früherer Arbeiten über den Dichtestrom (vgl. vorst. Referate) wird jetzt die Bodenreibung abhängig von der Geschwindigkeit am Boden angenommen. Für großen Dichtegradienten und geringe Turbulenz entsprechen die Resultate dem Falle „kein Bodenstrom“, für geringen Dichtegradienten und große Zähigkeit dem Falle „keine Bodenreibung“.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Koschmieder, H.: Die Meteorologie und ihre Nachbarwissenschaften. Scientia 55, 118—129 (1934).

Gião, Antonio: Sur la théorie de la prévision. Beitr. Physik frei. Atmosph. 21, 7—48 (1933).

Gião, Antonio: Über die Theorie der spontanen Störungen. Meteorol. Z. 50, 411 bis 423 (1933).

Das Kontinuum wird in Zellen aufgeteilt. Die Wirkungen der Umgebung auf eine Größe einer Zelle werden durch das „Zwangsfeld“ dargestellt, das speziell bei

stationären Außenwirkungen (z. B. Quasikonstanz der Sonnenwirkung auf die Erdatmosphäre) ein stationäres Zwangsfeld ist. Die trotzdem auftretenden Veränderungen werden als „Störungen“ aufgefaßt. Sie lassen sich auch auf den Fall nicht stationärer Außenwirkungen verallgemeinern. Der Totalwert einer Größe (Σ) für ein Teilchen M setzt sich zusammen aus ihrem Zwangsfeld- (Q) und Störungsfeldwert (q). Unterscheidet man weiter als q_T die Wirkung der Reibung, q_N die Wirkung der Normalspannungen auf M , beide von einem beliebigen Zeitpunkt an gerechnet, so spielen eine besondere Rolle die „globalen“ Größen (als Beispiele gibt Verf. Totalenergie und Geschwindigkeit), für die $q_N = 0$. Für sie gilt das „Adaptationsprinzip“

$$\Sigma(t) - \int_0^t \frac{dq_T}{dt} dt = Q(t) + \text{konst.},$$

so daß also globale Größen als Funktionen des Zwangsfeldes ausgedrückt werden können. Dieses Prinzip gibt Gleichungen für Geschwindigkeit und Druck, deren Integration angedeutet wird. Verf. findet aus seinen Gleichungen, daß jede Wellenstörung von einem wellenförmigen Zwangsfeld begleitet sein muß. Da ein solches Zwangsfeld eine Ausnahme ist, kommen nach ihm die Wellentheorien der atmosphärischen Störungen nicht in Frage.

B. Haurwitz (Cambridge, Mass.).

Arakawa, H.: On the development of gradient winds. Geophys. Mag. 7, 165—169 (1933).

Verf. behandelt die zeitliche Ausbildung des Gradientwindes $V_g = \frac{1}{2\bar{\omega}\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + i \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ unter Annahme raumzeitlich konstanter Druckgradienten $\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)$ und löst die Bewegungsgleichungen ($v_x + i v_y = V$)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -2\bar{\omega}i(V - V_g) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

durch

$$V = V^* + h \int_0^\infty \bar{\Phi}(z + \eta, t) e^{-h\eta} d\eta.$$

Hierin ist $V^* = V_g \{1 + \sqrt{2} \sin \gamma \cdot e^{-z/D} + i(\gamma + 3\pi/4 - z/D)\}$ mit $D = \sqrt{\mu/\bar{\omega}\rho}$ (= Reibungshöhe) und γ = Winkel zwischen Bodenwind und Druckgradienten die Lösung des stationären Problems $\frac{\partial^2 V^*}{\partial z^2} - i \frac{2\bar{\omega}}{\mu} \rho (V^* - V_g) = 0$, während durch

$$\bar{\Phi} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\lambda) e^{-\left(\frac{\mu}{\rho} \alpha^2 + 2\bar{\omega}i\right) \cdot t} \sin(\alpha z) \sin(\alpha \lambda) d\alpha d\lambda = (V - V^*) - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} (V - V^*)$$

wegen $F(z) = \left(1 - h \frac{\partial}{\partial z}\right) \{f(z) - V^*\}_{t=0}$ die Grenz- und Anfangsbedingungen $\frac{\partial V}{\partial z} = hV$ (für $z = 0$) und $v = f(z)$ (für $t = 0$) des zeitabhängigen Problems erfüllt werden.

H. Ertel (Berlin).

Watanabe, Satosi: On the theory of durability. Geophys. Mag. 7, 307—317 (1933).

Es werden die Grundlagen einer „Andauerrechnung“ entwickelt, deren Grundgesetz die Wahrscheinlichkeit des Aufhörens eines Zustandes A im Zeitintervall $(t, t + dt)$ angibt, wenn mit Sicherheit die Andauer von A im Zeitintervall $(0, t)$ feststeht.

H. Ertel (Berlin).

Milankovitch, M.: Das Problem der Verlagerungen der Drehpole der Erde in den exakten und in den beschreibenden Naturwissenschaften. Erinnerungen an Alfred Wegener. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 166—188 (1933).

Nach einer längeren, dem Andenken A. Wegeners gewidmeten Einleitung wird die Polfluchtkraft abgeleitet und sodann die Differentialgleichung der Polbahn in

vektorieller Form gegeben. Die Differentialgleichung führt zu einer einfachen mechanischen Deutung der Polbahn an der Erdoberfläche. *Hopfner (Wien).*

Bilimovitch, Anton: Zum Mechanismus der Polverlagerungen. Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 189—199 (1933).

Nachweis, daß die von Milankovitch benutzte Polfluchtkraft zur Ableitung der Polbewegung an der Erdoberfläche die nämliche Rolle spielt, wie die bei der Drehung des vom Verf. eingeführten, aus einem Kern und einer Schale bestehenden Erdmodells auftretenden Zentrifugalkräfte und die auf die Schale wirkenden Gravitationskräfte, wobei gezeigt wird, daß der Lösung des Verf. die Form des Theorems von Milankovitch erteilt werden kann. *Hopfner (Wien).*

Hopfner, F.: Über einige aktuelle Fragen der physikalischen Geodäsie. II. Antwort an Herrn Prof. H. Jeffreys, Cambridge. Gerlands Beitr. Geophys. 41, 181—184 (1934).

H. Jeffreys [Gerlands Beitr. Geophys. 39, 374—377 (1933); vgl. dies. Zbl. 7, 287] hatte zwecks Untersuchung von Geoidundulationen die Reduktion der beobachteten Schwerkraftwerte nach der Freiluftformel empfohlen. Verf. weist diese Formel zurück und hält für den genannten Zweck nur die Reduktionsformel nach Prey für verwendbar (vgl. dies. Zbl. 6, 288). *Schmehl (Potsdam).*

Jenne, W.: Breitengleichen und Längengleichen als Parameterlinien allgemeiner Flächen. Astron. Nachr. 251, 161—176 (1934).

Verf. stellt sich die Aufgabe, grundlegende, in der Mehrzahl von H. Schmehl gefundene Ergebnisse von Untersuchungen über den Verlauf von Breitengleichen und Längengleichen (d. s. die Verbindungslinien der Punkte gleicher geographischer Breite bzw. gleicher geographischer Länge auf der mathematischen Erdoberfläche) in vektoranalytischer Form erneut abzuleiten und sie in einigen Punkten zu ergänzen. Insbesondere werden neben den Gaußschen Fundamentalgrößen erster Ordnung, mit denen man nach Schmehl bei der Lösung der geodätischen Grundaufgaben auskommt, auch noch die Fundamentalgrößen zweiter und dritter Ordnung in die Betrachtungen eingeführt. Einige Ergebnisse werden auf besondere Flächen angewendet: auf Minimalflächen, auf Flächen, die von der Kugel wenig abweichen, und auf das dreiaxige Ellipsoid. *Schmehl (Potsdam).*

Schramm, Gerhard: Das Winkelbildverfahren zum Abstecken von Bogen. Z. Vermessgswes. 63, 49—64 u. 97—109 (1934).

Um eine ebene Kurve abzustecken, deren Krümmung eine gegebene Funktion der Bogenlänge ist, benutzt der Verf. das „Winkelbild“. Dieses ist eine Kurve, die der Originalkurve in der Weise zugeordnet ist, daß ihre Abszissen den Bogenlängen der Originalkurve und ihre Ordinaten den Richtungswinkeln der Originalkurve proportional sind. Auf Grund der Eigenschaft, daß das Winkelbild die Integrallinie einer Kurve ist, deren Ordinaten den Krümmungen der Originalkurve proportional sind, ist es in einfacher Weise möglich, die Abstände der Originalkurve von einer einfachen als Standlinie gewählten Näherungskurve (Polygonzug, Kreis, Eisenbahngleis) mit jeder in der Praxis verlangten Genauigkeit zu ermitteln und abzustecken. Als Sonderfälle der Anwendung des Winkelbildverfahrens werden die quadratische Parabel als Ersatz für Bogen mit konstanter Krümmung und die kubische Parabel als Ersatz für Bogen mit linear veränderlicher Krümmung behandelt, ferner die Verfahren von Nalenz-Höfer und Chappellet zum Abstecken von Gleisbogen. *Schmehl.*

Schmidt: Die Verwendung des Rechenschiebers bei Teilungsaufgaben im Feld. Z. Vermessgswes. 63, 145—157 (1934).

Kerl: Das Schnittpunktsproblem auf der Doppelrechenmaschine. Allg. Vermessgswes. Nachr. 46, 108—109 (1934).